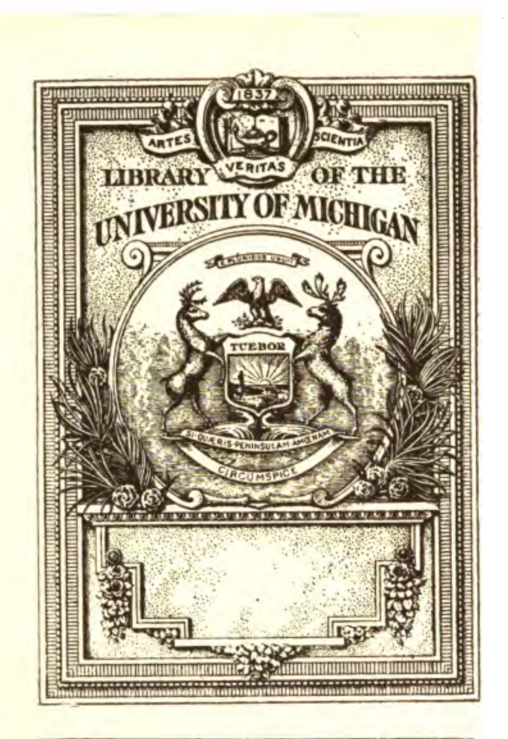



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Bestimmung der zweiten Ableitungen

der

Flächenpotentiale

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt

der hohen philosophischen Fakultät

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

Eveline Molnár

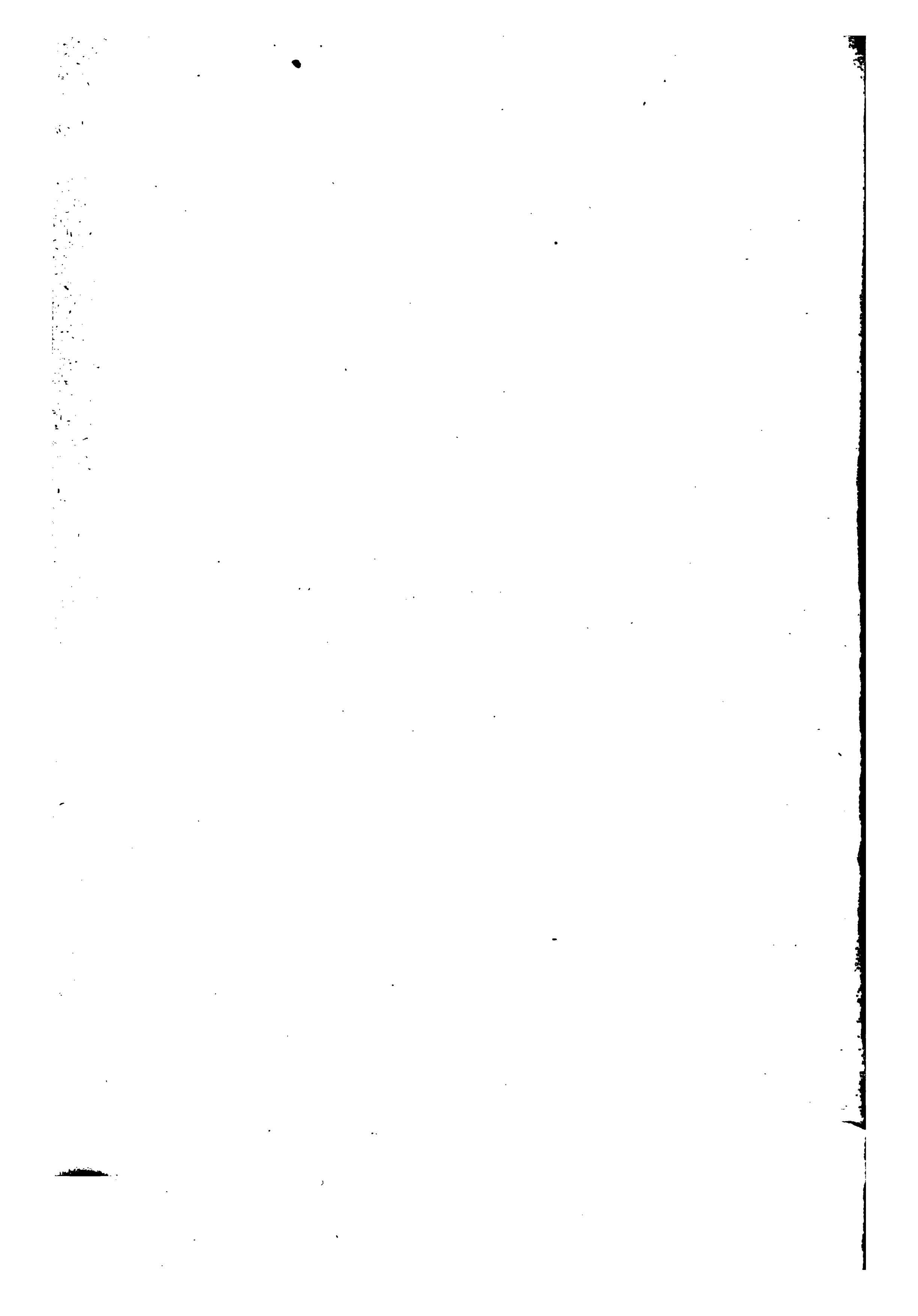
aus Ungarn.

Begutachtet von Herrn
Professor Dr. *H. Burkhardt.*

Zürich
Druck von Zürcher & Furrer
1900.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
5-7-1923

Meinen lieben Eltern.



Inhaltsverzeichnis.

B.

Vierter Abschnitt.

V.

Bestimmung der allgemeinsten Formel für die zweiten Derivierten des Potentials einer Doppelfläche.

VI.

AB.

Fünfter Abschnitt.

VII.

Diskontinuitäten der zweiten Derivierten der Flächenpotentiale in dem behandelten Fall.

Sechster Abschnitt.

VIII.

Nachweis dafür, dass die entwickelten Formeln für die gemischten Ableitungen der Flächenpotentiale dem ‚Fundamentalsatz der partiellen Derivierten' genügen.

Siebenter Abschnitt.

IX.

Bestimmung

der

zweiten Ableitungen der Flächenpotentiale.

Ueber die Derivierten der Flächenpotentiale erschienen unter dem Titel: *„Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potentiali“* die Untersuchungen des Herrn E. Beltrami[1]) im Jahre 1880; sie beziehen sich auf die von Herrn Carl Neumann veröffentlichten Sätze[2]).

Es geht aus den Carl Neumann'schen Untersuchungen hervor, dass auch die höheren Derivierten der Flächenpotentiale sich als Potentiale einer einfachen und einer Doppelfläche darstellen lassen.

Herr Beltrami zeigte nun bezüglich der ersten Derivierten der Flächenpotentiale einerseits, dass eine besondere Wahl des Flächen-Koordinatensystems für ihre Entwickelung weder notwendig, noch vorteilhaft sei, — andererseits, dass die wichtigen Schlüsse von Herrn C. Neumann für eine offene Fläche ebenso gelten, wie für eine geschlossene. Darin liegt der Wert der Beltrami'schen Abhandlung. —

Beide Untersuchungen nehmen auf die zweiten Derivierten beider Arten oder einer Art Flächenpotentiale nur insofern Rücksicht, als sie, gestützt auf das von Herrn C. Neumann für die Struktur der höheren Derivierten angeführte Schema, ihre Unstetigkeitsformeln angeben, welche sich unmittelbar bilden lassen, sobald die ersten Derivierten explicite berechnet sind.

Herr Th. Horn behandelt in seiner Dissertation (Schlömilchs Zeitschrift [1881] Bd. 26) ebenfalls „die Diskontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials“. Er untersucht die sprungweisen Aenderungen der nach beliebigen Richtungen

genommenen zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht, indem er die Fläche durch die Gleichung: $c = c(a, b)$ darstellt und die Derivierten als Komponenten der Kraft ausdrückt, welche die auf der betrachteten Fläche gelegenen Massen auf den Punkt $(x\,y\,z)$ ausüben. Diesen Ausdruck formt er dann durch eine vorgenommene partielle Integration um, und erhält eine Formel für die Diskussion der Unstetigkeiten.

Eine vollständige Entwickelung der zweiten Derivierten beider Arten Flächenpotentiale ist bis jetzt nicht geliefert worden. Betreffend dieser unternehme ich es, die von Herrn C. Neumann ohne weitere Begründung mitgeteilten Sätze in allgemeinster Weise zu verifizieren, indem ich die betreffenden Formeln für beliebige krumme Flächen, mögen sie offen oder geschlossen sein, mittels der Gaussischen Flächendarstellung explicite aufstelle. — Einfach sind die Formeln freilich nicht.

Durch diese allgemein geführte Bestimmung und durch die vollständige Darstellung der zweiten Derivierten der Flächenpotentiale hoffe ich bezüglich der Entwickelungen auf dem Gebiete der Potentialtheorie etwas beizutragen.

Hinsichtlich dieser Art Untersuchungen erschien zwar in der Zwischenzeit von Herrn G. A. Maggi unter seinen anderen potentialtheoretischen Aufsätzen (zu den Jahren 1889, 1891) eine Abhandlung (Nuovo Cimento, serie 3, XXXIII, p. 249—259, 1893), in welcher die charakteristischen, wichtigsten Eigenschaften des Flächenpotentials selbst, durch strenge Grenzbetrachtungen, ohne Benutzung der teilweisen Integration hergeleitet wurden.

Von den Ableitungen untersucht aber Herr Maggi unter weiteren Voraussetzungen nur die ersten.

Dann publizierte im Jahre 1899 Herr H. Poincaré das Buch „Théorie du potentiel newtonien“. Er entwickelt für seinen Zweck, die Unstetigkeiten darzulegen, auch die zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht; und darin liegt der Fortschritt gegenüber den vorangegangenen, diesbezüglichen Untersuchungen. Hingegen sind die betrachteten Fälle von niedrigerem Grad der Allgemeinheit, als die Beltrami'schen.

Herr H. Poincaré stellt zunächst die ersten Derivierten des Potentials für eine begrenzte ebene Fläche dar ([p. 233] von der Art der simple couche) und diskutiert die Unstetigkeiten, die für

die einzelnen Glieder nach einer nochmaligen Differentiation eintreten würden, wenn der angezogene Punkt die Fläche durchschreitet. Er führt seine Betrachtungen bezüglich einer geschlossenen Fläche auf den Fall der Ebene zurück und berechnet die zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht, wobei er mit unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung operiert (p. 236—40). So verschafft er sich die ersten Derivierten eines Doppelflächen-Potentials, resp. diejenigen Glieder, aus welchen auf die Diskontinuität dieser Derivierten geschlossen werden kann. Er deutet auch eine direktere Methode (p. 254—59) zur Untersuchung der Unstetigkeiten für die ersten Derivierten eines Doppelflächen-Potentials an; diese setzt das Verhalten der zweiten Derivierten für eine Durchgangsstelle von der Dichtigkeit Null als bekannt voraus. Dabei wirft er eine flüchtige Betrachtung auf die tangentiellen Unstetigkeiten der ersten Derivierten des Potentials auch von nichtgeschlossenen Doppelflächen, die er zu geschlossenen ergänzt.

Von demselben Grad der Allgemeinheit wie die Beltramischen sind aber die diesbezüglichen Untersuchungen in dem ganz neuerdings publizierten Buche über Potentialtheorie von Herrn H. Korn zu München. Das Problem der Derivierten der Flächenpotentiale ist in dem gleichen Bereich behandelt worden, wie in der genannten Abhandlung von Herrn E. Beltrami; was neu hinzukommt, ist die explicite Aufstellung der Formel der Flächenpotentiale selbst. Für die zweiten Derivierten beider Arten Flächenpotentiale sind ebenfalls nur die Unstetigkeitsformeln angegeben worden, d. h. die Glieder, die sich überall stetig verhalten, sind von vornherein weggelassen.

Die Methode ist aber eine andere, indem Herr A. Korn aus der bekannten Gleichung: $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ der Flächendarstellung ausgeht. Dennoch ist seine Entwickelung nicht anschaulicher und es erscheinen bei ihm die Resultate in Formen, die noch etwas ausgedehnter, also weniger elegant und keineswegs weniger kompliziert sind, wie die betreffenden Resultate bei Herrn E. Beltrami, resp. wie diejenigen, welche die vorliegende Darstellung aufweist. Es eignen sich die Formeln von Herrn Korn weniger für die unmittelbare Darlegung der Unstetigkeiten der n^{ten} Derivierten aus dem expliciten Ausdrucke für die $n-1^{sten}$ Derivierten. —

Dafür setzt aber die von Herrn Korn angewandte Methode weniger voraus, als die Operationen mit den Gaussischen Fundamentalgrössen, indem sie neben den Grundkenntnissen der Differential- und Integralrechnung nur von dem Prinzip des Stokes'schen Theoremes Gebrauch macht. Und das ist, wenn auch nicht für die Wissenschaft, so doch für ein anfängliches Studium der Potentialtheorie ein Vorteil der Bearbeitung, deren Veröffentlichung mich schon mitten in der Arbeit meiner Entwickelungen traf.

Was die formelle Darstellung anbelangt, führt Herr Korn als Repräsentant der Dichtigkeitsfunktionen beider Arten Flächen je eine sog. Funktion der Stelle ein, der er die hinreichenden Eigenschaften beilegt.

In der vorliegenden Abhandlung werden die Flächen als Krümmungsplatten, auf welchen etwa eine Elektricitätsmasse oder eine Flüssigkeitsschicht von gewisser Dichtigkeit ausgebreitet ist, gedacht. Bezüglich dieser Schichten sind die zweiten Derivierten des Potentials, resp. des Geschwindigkeitspotentials zu bestimmen, wobei die Entwickelung von dem Attraktionsgesetz völlig unabhängig ist.

Die Untersuchung stützt sich auf bekannte flächentheoretische Sätze; der Vollständigkeit und Anschaulichkeit halber will ich sie kurz auseinandersetzen und die zu benutzenden Formeln entwickeln.

Das ausgeprägte Interesse für die potentialtheoretischen Probleme und die Freude an meinem Thema — durch das Erkennen der grossen Bedeutung der Potentialtheorie auf breitem Gebiete, namentlich durch das Erkennen ihrer astronomischen, physikalischen und rein mathematischen Beziehungen — verdanke ich meinen hochverehrten lieben Hochschullehrern, den Herren Professoren A. Wolfer, A. Kleiner, H. Burkhardt zu Zürich.

Insbesondere erlaube ich mir, bei diesem Anlass meinen wärmsten Dank dem Herrn Professor Dr. H. Burkhardt auszusprechen, der meine Aufmerksamkeit auf manche wichtige Frage dieser Theorie gerichtet und mich in die Lektüre der mathematischen Original-Abhandlungen, überhaupt in die mathematische Untersuchung und in die selbständige Arbeit eingeführt hat.

Erster Abschnitt.

I. Flächentheoretische Betrachtungen.

1. **Darstellung der Fläche.** Wir wollen die zweiten Ableitungen des Potentials einer beliebigen krummen Fläche herstellen. Denken wir uns das Potential zunächst einer einfachen Schicht (simple couche) in folgende schematische Form gesetzt:

$$V = \int h \, \psi \, d\, \sigma, \tag{I}$$

wo die Integration über alle Elemente ($d\sigma$) der Fläche erstreckt ist; ψ der reziproke Wert der Entfernung des variablen Punktes ($x y z$) von diesem Flächenelemente, dessen Lage durch die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ eines Flächenpunktes gegeben ist. Die Massenbelegung sei von einer Dichte, die in der Weise von Stelle zu Stelle auf der Fläche variieren kann, dass die Dichtigkeitsfunktion h auf der Fläche abteilungsweise eindeutig und stetig sei; d. h. es soll sich das betrachtete Gebiet in eine endliche Anzahl von Flächenstücken zerlegen lassen, auf denen die Funktion h eindeutig und stetig ist.

Wollen wir die Formel für die Derivierten des Potentials explicite aufstellen, so bedürfen wir vor allem die analytische Definition des Flächenelementes. Die Methode der Gaussischen Flächenbestimmung[3,4]) beruht wesentlich darin, dass man die Bogen ausdrückt, mittelst welcher sich das Flächenelement darstellen lässt.

Wir denken uns die krumme Fläche durch die Gleichungen gegeben:

$$\xi = \Phi(u, v)$$
$$\eta = X(u, v)$$
$$\zeta = \Psi(u, v)$$

durch welche ihre Natur chakterisiert ist. Würde man als unabhängige Variabele u, v zwei rechtwinklige Koordinaten annehmen, so bekäme man unmittelbar die Gleichung der Fläche, aufgelöst nach der dritten der rechtwinkligen Koordinaten.

Wir betrachten aber, um die Allgemeinheit unserer Entwickelung von vornherein zu sichern, u und v als die Koordinaten eines beliebigen krummlinigen Systems, von denen die rechtwinkligen stetige Funktionen seien. Ein krummliniges Koordinatensystem ist geometrisch dargestellt durch zwei beliebig beschaffene Kurvenfamilien, mit welchen wir die Fläche überzogen denken. Legt man einer der beiden unabhängigen Variabeln (u) konstante Werte bei, so hat man den Verlauf der anderen (v), deren Wertänderungen auf der Fläche eine Kurve (die v-Kurve) entspricht, zu welcher die konstante Grösse (u) als Parameter zugehört. Ebenso ist für die andere Kurve (u-Linie) u veränderlich und v konstant. Wir wollen bei dieser Ausdrucksweise im Laufe der vorliegenden Arbeit festhalten. Jeder Punkt der Fläche erscheint als Durchschnitt zwei solcher Kurven. Eine beliebige Kurve auf der Fläche ist dargestellt durch eine Beziehung zwischen u und v.

Diese Darstellungsweise liefert für das Bogenelement jener Kurve folgenden Wert:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = & \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 \cdot du^2 \\
& + 2 \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} \cdot du\, dv \\
& + \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 \cdot dv^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

wo das Σ-Zeichen die Summe der Glieder bezeichnet, welche in Bezug auf η und ζ so gebildet sind, wie die unter dem Symbol stehende Grösse in Bezug auf ξ.

Die Koeffizienten[4])

$$
\sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}, \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2
$$

des Bogenelementes bezeichnet Gauss successive mit

$$
E, \; F, \; G.
$$

Die durch diese Fundamentalgrössen bewerkstelligte Relation zwischen den rechtwinkligen und krummlinigen Koordinaten eines beliebigen Flächenpunktes, ist der eigentliche Ausgangspunkt für die allgemeine Bestimmung einer Fläche.

2. **Flächenbedingungen für die zweiten Derivierten der Flächenpotentiale.** Wir wollen in unseren Entwickelungen uns auf die vorhin dargestellten Koeffizienten des Bogenelementes stützen. Wir schreiben aber zunächst jenen Flächen-Funktionen selbst nicht nur die Existenz, sondern auch die Stetigkeit zu; m. a. W. wir setzen als eine erste Anforderung für unsere krumme Fläche fest, dass sie von stetiger Biegung sei.

Durch die Voraussetzungen dann, denen die Koeffizienten des Bogenelementes samt ihrer ersten und zweiten Derivierten auf der Fläche Genüge leisten mögen, ist andererseits die Krümmung der Fläche bedingt. Man kann nämlich, wie es aus den flächentheoretischen Untersuchungen von Gauss bekannt ist, das Mass[4]) der Krümmung einer Fläche als alleinige Funktion der Fundamentalgrössen (E, F, G) und ihrer ersten und zweiten Derivierten ausdrücken.

Schon im (A)-Teile unserer Darstellung, welcher sich auf die Bestimmung der zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht bezieht, treten auch die zweiten Derivierten jener Flächenfunktionen auf, während die Formeln für die ersten Derivierten beider Arten Flächenpotentiale nur die ersten Differentialquotienten der Grössen E, F, G aufweisen.

Wir wollen diese, indem wir die Fundamentalgrössen successive nach u und v differenziieren, hier einführen; wir rekurrieren dann späterhin auf diese Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial v} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial u} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\text{also:}\quad \left.\begin{aligned} \sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Wir wollen festsetzen: diese ersten Derivierten, samt den Grössen E, F, G selbst seien auf der Fläche eindeutig, stetig und ihre zweiten Ableitungen, d. h. die dritten der Funktionen ξ, η, ζ endlich und integrabel. — Sind aber alle Grössen, die den Ausdruck für das Mass der Krümmung bilden, endlich und stetig, so ist damit verlangt, dass die Fläche selbst von endlicher und stetiger Krümmung sei. Für eine solche Fläche sind dann die zweiten Derivierten beider Arten Flächenpotentiale eindeutig und stetig, mag der variable Punkt $(x\,y\,z)$ in die unmittelbare Nähe der Fläche herantreten.

In unserer Darstellung für die 2ten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht setzen die funktionentheoretischen Operationen von der zweiten Derivierten der Grössen E, F, G nichts voraus, so dass also eine Unterscheidung der Bedingungen für die beiden Arten Flächen funktionentheoretisch sich schärfer formulieren lässt.

Ueber die Grundeigenschaften hinaus, welche in der stetigen Biegung und Krümmung vorausgesetzt sind, sei die Fläche keiner Beschränkung unterworfen.

3. **Geometrische Bedeutung der Fundamentalgrössen I. Ordnung.** Durch die Vorstellung, dass die krummlinigen Koordinaten als zwei Systeme von Kurven derart, wie im Art. 1 charakterisiert wurde, sich darstellen lassen, ist man in der Lage, den Gaussischen Koefficienten E, F, G eine geometrische Erklärung zu geben. Der Bogen, welcher die eine Seite des Flächenelementes bildet, das als ein unendlich kleines Parallelogramm aufgefasst wird, lässt sich auf der u-Kurve, der also die Aenderung du entspricht, während $v = \text{const.}$ ist, durch

$$\sqrt{E}\cdot du$$

und auf der v-Kurve durch

$$\sqrt{G}\cdot dv$$

analytisch darstellen. Der Inhalt des Flächenelementes wird somit ausgedrückt durch

$$d\sigma = \sqrt{E}\cdot du\cdot\sqrt{G}\,dv\cdot\sin\theta,$$

wo θ den Winkel bedeutet, den die beiden Begrenzungsbögen miteinander einschliessen. Der Cosinus dieses Winkels lässt sich durch

eine bekannte Formel der analytischen Geometrie berechnen, er ist von der Form:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{EG}} \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \qquad (4)$$

Daraus geht unmittelbar hervor, dass

$$F = 0 \qquad (5)$$

die Bedingung der Orthogonalität der beiden Kurvenfamilien $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ ist.

Wir werden späterhin (siehe Schlussabschnitt) von der Bedingung des Senkrechtstehens zweier Kurven ($\varphi = \text{const}$, $\chi = \text{const}$) Gebrauch machen, welche in Form von Differentialparametern [5,6]) dargestellt ist:

$$\Delta_1(\varphi, \chi) = 0. \qquad (5')$$

Mittelst der gefundenen Werte für den Winkel zwischen den Seiten $\sqrt{E} \cdot du$ und $\sqrt{G} \cdot dv$ des Flächenelementes, findet sich die Gleichung:

$$d\sigma = H\,du\,dv \qquad (6)$$

für den Inhalt jenes Elementes. Dabei ist unter H der positive Wert der Wurzelgrösse $\sqrt{EG - F^2}$ verstanden:

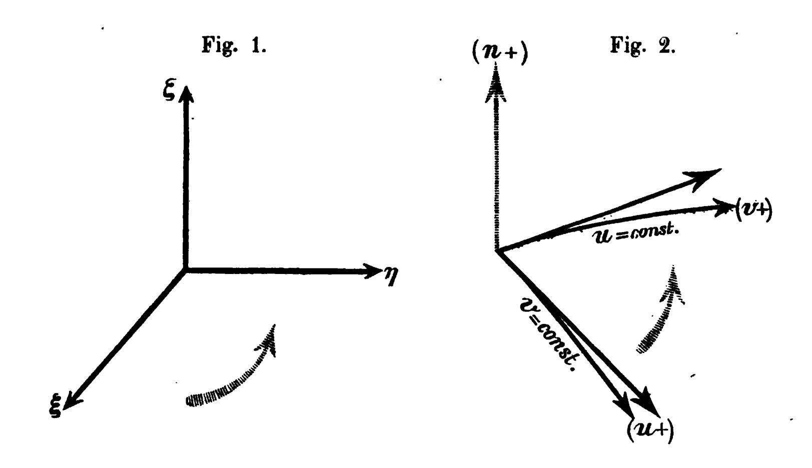
$$H = \sqrt{EG - F^2} > 0. \qquad (7)$$

Der Ausdruck $EG - F^2$ bildet eine wichtige Verbindung der Fundamentalgrössen. Sie kann für reelle Flächen nicht Null werden, sie kann aber auch nicht negativ sein, indem man zeigen kann, dass H^2 sich aus lauter quadratischen Gliedern additiv zusammensetzen lässt. Also ist:

$$EG - F^2 > 0.$$

4. **Festsetzungen über den Richtungssinn der Normalen.** a) Damit die Bestimmung des Richtungssinnes sowohl für offene wie für geschlossene Fläche zutreffe, wollen wir annehmen, es solle die Normale (n), welche in irgend einem Punkt (u, v) der Fläche errichtet wird, in Bezug auf die Kurven $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ so stehen, wie die ζ-Achse des in Art. 1 (p. 5) eingeführten rechtwinkligen Systems in Bezug auf die ξ-, η-Achsen desselben Koordinatensystems,

so dass die positive u-Kurve (d. h. $v =$ const), resp. ihre Tangente durch eine in gleichem Sinn erfolgte Drehung in die Lage der positiven v-Kurve (d. h. $u =$ const), resp. ihrer Tangente kommt, welche die positive ξ-Achse in die positive η-Achse überführt, wenn die Drehung um die Normale (n), resp. um die ζ-Achse vorgenommen wird. Es ist dabei gleichgültig, welche Drehungsrichtung für die beiden Koordinatensysteme gleichstimmig positiv gewählt wird. Figuren 1 und 2 sollen andeuten, welche Drehung für die vorliegenden Entwickelungen als positiv gemeint ist.



Die Kurven $v =$ const, $u =$ const schliessen einen Winkel ein, der infolge $H > 0$ (Gl. 7) und der Relation (4), zwischen 0 und 180° variiert, ohne die Grenzen zu erreichen.

Es wird von Nutzen sein, wenn wir die Cosinuse auch derjenigen Winkel, welche die Normale mit der ξ-, η- resp. ζ-Achse einschliesst, mit den Gaussischen Grössen in Beziehung bringen. Diese Cosinuse können auch durch die Derivierten:

$$\frac{\partial \xi}{\partial n}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n}$$

ausgedrückt werden; wir wollen sie kurzweg bezeichnen mit

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma.$$

Die analytische Geometrie liefert uns für α folgendes, und für β, γ dann analoge Relationen:

$$\lambda \cos (n\, \xi) = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{d v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right)$$

$$\lambda = \frac{H}{\sqrt{EG}},$$

wenn nämlich λ der vorläufig unbestimmte Faktor war, und $\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \eta}{\partial u}$, $\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \eta}{\partial v}$ $\left(\text{bezw. } \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)$ die Cosinus der Winkel bedeuten, welche $v = \text{const}$, resp. $u = \text{const}$ mit der η-Achse (bezw. mit der ζ-Achse) bilden.

Führen wir die Bezeichnungen α, β, γ für die Richtungscosinuse der Normale ein, so haben wir:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right\} \\ \beta &= \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} \right\} \\ \gamma &= \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

b) Wir suchen nunmehr die analytischen Beziehungen zwischen den Kurvenfamilien ($v = \text{const}$, $u = \text{const}$) der Fläche und ihrer Be-

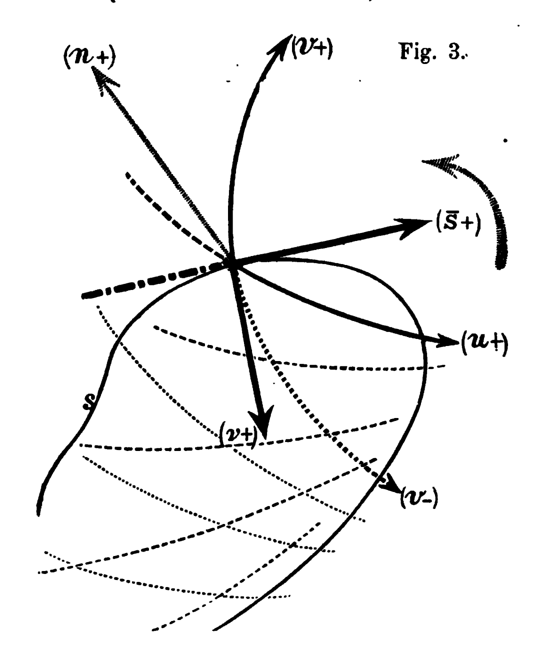


Fig. 3.

grenzungskurve (s), resp. deren Tangente $(\bar{s})$ festzustellen, um uns gewisse Reduktionsformeln für das Flächenintegral verschaffen zu können.

Zu diesem Ende müssen wir ausser der über die Fläche sich erhebenden Flächen-Normale (n) noch eine zu der Begrenzungskurve senkrechte Richtung beachten. Wir führen die Contour-Normale ein. Diese Normale, die wir mit (ν) bezeichnen wollen, gezogen in der Fläche von einem Punkte des Randelementes (ds) aus, sei nach dem Gebiete hin, wo die Fläche sich erstreckt, positiv gerechnet. Diese sogen. Contour-Normale (ν) und die zugehörige Tangente $(\bar{s})$ bilden mit der Normale (n) ein neues Koordinatensystem. Wir wollen den Drehungssinn dieses Systems $(\nu, \bar{s}, n)$ folgenderweise festsetzen:

$$(\nu, \bar{s}, n) \cong (u, v, n).$$

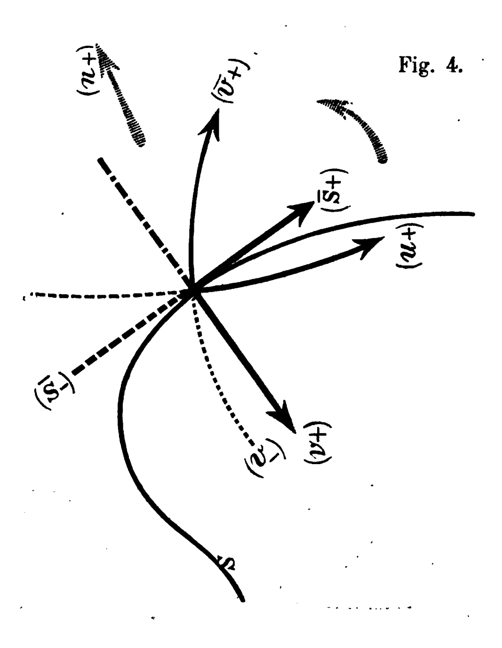


Fig. 4.

Figuren 3 und 4 versinnlichen die Richtungen der beiden Normalen bezüglich der Fläche, welche von den u- und v-Kurven, nach denen sich die Flächennormale (n) richtet, überzogeu ist, und bezüglich der Begrenzung. (Denkt man die Fläche in der Lage, dass

sie die Zeichnungsebene durchstösst, so deutet die positive Normale (n) eine nach oben, die positive Contour-Normale (ν) eine nach vorn verlaufende Richtung, für die getroffene Annahme an.)

Figur 4 weist unmittelbar folgende Relationen zwischen je einer Kurve $v =$ const, $u =$ const und der Tangente $(\bar{s})$ der Begrenzung, resp. ihrer Normale (ν) auf:

$$\left.\begin{aligned} \sin\,(s,\,u) &= +\cos\,(\nu,\,u) \\ \sin\,(s,\,v) &= -\cos\,(\nu,\,v) \end{aligned}\right\} \qquad (9_{1,2})$$

wobei (su) den Winkel bedeutet, den der Rand mit der u-Kurve $= v$ const einschliesst und (sv) denjenigen mit $u =$ const.

c) Hat ein Flächenpunkt die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ, so besitzt der unmittelbar benachbarte in der Richtung der Contour-Normale folgende Koordinaten:

$$\xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\nu;$$

$$\eta + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\nu;$$

$$\zeta + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\nu.$$

so heisst der Winkel zwischen der Normale (ν) und irgend einer (Φ) der Koordinatenachsen ξ, η, ζ:

$$\cos\,(\nu,\,\Phi) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \nu}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \mp 2F\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2}}.$$

Der Nenner ist dabei gleich der Einheit, wegen:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}\right)^2 = 1,$$

wo die einzelnen Glieder die Cosinuse der Contour-Normale sind bezüglich der Achsen ξ, η, ζ.

Und da:

$$\cos\,(v,\,\Phi) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

ist, haben wir als direkte Beziehungen zwischen der Contour-Normale (ν) resp. der Tangente $(\bar{s})$ und der v-Kurve $= u$ const:

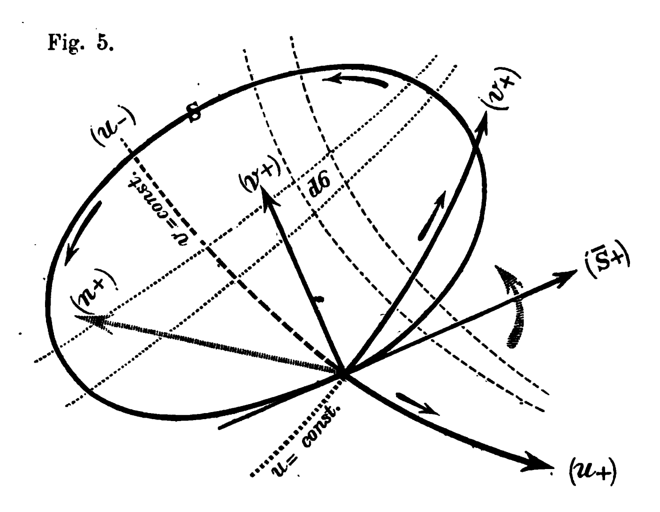
$$\cos(\nu, v) = \frac{F\frac{\partial u}{\partial \nu} + G\frac{\partial v}{\partial \nu}}{\sqrt{G}} \quad (9_a); \qquad \sin(\bar{s}, v) = \frac{H\frac{\partial u}{\partial s}}{\sqrt{G}} \quad (9_d)$$

und ganz analog für die u-Kurve $= v$ const:

$$\cos(\nu, u) = \frac{F\frac{\partial v}{\partial \nu} + E\frac{\partial u}{\partial \nu}}{\sqrt{E}} \quad (9_A); \qquad \sin(\bar{s}, u) = \frac{H\frac{\partial v}{\partial s}}{\sqrt{E}}. \quad (9_D)$$

5. **Die Reduktion eines Flächenintegrales** mittelst der eben abgeleiteten Formeln bewerkstelligen wir in der Weise, dass wir die Integration untenstehender Doppelintegralen teilweise ausführen und für die Integranden $\frac{\partial v}{\partial s}$ resp. $\frac{\partial u}{\partial s}$, die dann zum Vorschein kommen, die entsprechenden Werte aus den eben gefundenen

Fig. 5.



Relationen (Gleichungen: 9_D und 9_A resp. 9_d und 9_a) entnehmen, wobei wir auf die Gleichungen (9_1 und 9_2) und zugleich darauf achten, dass infolge der getroffenen Annahmen das Kurvenintegral entgegengesetztes Vorzeichen hat, wie das Flächenintegral, wenn die Integration im gleichen Sinne in Bezug auf die u-Kurve $=$ v const erstreckt wird (siehe Fig. 5).

Also wie folgt:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \Omega}{\partial u}\, du\, dv = -\int\limits_{(s)} \Omega \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = -\int\limits_{(s)} \Omega \left\{ E \frac{\partial u}{\partial \nu} + F \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} \frac{1}{H}\, ds \qquad (9_A)$$

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \Omega}{\partial v}\, dv\, du = +\int\limits_{(s)} \Omega \frac{\partial u}{\partial s}\, ds = -\int\limits_{(s)} \Omega \left\{ F \frac{\partial u}{\partial \nu} + G \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} \frac{1}{H}\, ds \qquad (9_a)$$

Ω ist dabei irgend eine auf der Fläche (σ) samt ihren ersten Derivierten überall eindeutige, stetige Funktion von u, v.

Die Integrationen bei den Doppelintegralen sind auf die ganze Fläche (σ) erstreckt und die in Bezug auf die Integranden $\frac{\partial \Omega}{\partial u}$ resp. $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ vollzogenen Integrationen über die Begrenzung (s) jener Fläche genommen, allemal in positivem Sinn.

Erfolgt der Umlauf des Integrationsweges in Bezug auf die Normale (n) in dem gleichen Sinne, der für das Koordinatensystem als positiver Drehungssinn festgestellt wurde, dann ist der Integrationssinn positiv.

Zweiter Abschnitt.

II. Entwickelung der Hülfssätze.

6. Beziehung der Gaussischen Fundamentalgrössen zu den Differentialparametern. Im Folgenden will ich diejenigen flächentheoretischen Sätze, in welche Herr Beltrami[6]) die Ausdrücke der Differentialparameter eingeführt hat, entwickeln, damit wir die Formeln, von denen wir Gebrauch machen, nicht vorauszusetzen brauchen.*)

Es sollen die von Gauss formulierten Bestandteile der Koefficienten des Bogenelementes noch bezüglich der Normale (n) erweitert werden, wobei die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Fläche ebenso eindeutige Funktionen der Normale (n)

*) Durch eine wesentliche Aenderung der Bezeichnungen will ich den Zusammenhang zwischen unseren Entwickelungen und den durch Herrn Beltrami abgeleiteten ersten Derivierten der Flächenpotentiale nicht erschweren.

seien, wie nach früherer Annahme der Parameter (u, v). Wir können die Normalen als die Elemente eines dritten Kurvensystems, dessen Parameter auf der Fläche Null ist, ansehen. Für die Aenderungen, bezogen auf die Normale, treffen wir dann einfachere Ausdrücke.

Bedeuten $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ die totalen Aenderungen der ξ-, η-, ζ-Koordinaten, jetzt in Bezug auf u, v und noch n, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta &= \{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2\} du + \{\xi'\xi_{,} + \eta'\eta_{,} + \zeta'\zeta_{,}\} dv \\ &= E du + F dv \end{aligned}\right\} \quad (10_a)$$

indem das Glied $\sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial n} dn$ auf Grund der Gleichung (5) verschwindet.

Aus der Darstellung ist ersichtlich, dass die oberen Indices sich auf die Derivierte nach u und die untern auf eine nach dem Parameter v genommene beziehen. Bilden wir die zu (10) analog konstruierte Gleichung in Bezug auf v. Sie heisst:

$$\xi_{,} d\xi + \eta_{,} d\eta + \zeta_{,} d\zeta = F du + G dv. \quad (10_b)$$

Eliminiert man dann $F dv$ resp. $F du$, so erhält man für die totale Aenderung:

$$du = \frac{1}{EG - F^2} \left\{ G\,[\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta] - F\,[\xi_{,} d\xi + \eta_{,} d\eta + \zeta_{,} d\zeta] \right\} \quad (11_a)$$

und einen analogen Ausdruck für dv.

Der Ausdruck für die totale Aenderung dn entsteht, indem man $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ successive mit dem entsprechenden Richtungscosinus der Normale multipliziert. Dieser reduziert sich wegen der Bedingungsgleichung (5) auf:

$$dn = \alpha\, d\xi + \beta\, d\eta + \gamma\, d\zeta. \quad (11_c)$$

Wir führen die symbolischen Bezeichnungen allgemein ein:

$$\frac{G\varphi' - F\varphi_{,}}{H} = M_\varphi \quad (12_a)$$

$$\frac{E\varphi' - F\varphi_{,}}{H} = N_\varphi \quad (12_b)$$

für irgend eine Funktion φ, von der wir festsetzen, dass sie samt ihren ersten Derivierten eine stetige Funktion in ξ, η, $\zeta = f(u, v, n)$ sei, so dass:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial u} du$$

(wo die Summation der rechten Seite der Gleichung zu erstrecken ist auf die Glieder, die in Bezug auf v, n analog gebildet sind.) Aus demselben Grunde besteht folgende Gleichheit:

$$M_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + N_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = M_\varphi \frac{\partial \xi}{\partial u} + N_\varphi \frac{\partial \xi}{\partial v}\,. \tag{13}$$

Setzt man für du, dv, dn die vorhin gefundenen Werte (11_{a-c}) in ihrer symbolischen Bezeichnung ($12_{a,b}$) ein, so erscheint die totale Aenderung der Hülfsfunktion φ in den symbolischen Verbindungen der Gaussischen Fundamentalgrössen:

$$\begin{aligned} d\varphi = & \left\{\frac{1}{H}\left(M_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial u} + N_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} d\xi \\ & + \left\{\frac{1}{H}\left(M_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial u} + N_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} d\eta \\ & + \left\{\frac{1}{H}\left(M_\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial u} + N_\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} d\zeta \end{aligned} \tag{14}$$

Daraus ergeben sich die partiellen Aenderungen nach ξ, η, ζ unmittelbar.

Vertauscht man im Sinne der Gleichung (13) die Rolle der Funktionen ξ, η, ζ und φ, so giebt die Addition der drei partiellen Ausdrücke:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$

jede multipliziert mit der analogen Derivierten einer neu einzuführenden Grösse χ, die eine gleichbeschaffene Funktion von ξ, η, ζ sei wie φ, folgendes:

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \frac{1}{H}\left\{M_\varphi \sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial \xi} + N_\varphi \sum \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right\} \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sum \frac{\partial \xi}{\partial n}\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Und da χ eine Funktion von den Funktionen u, v, n ist, können wir schreiben:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \frac{1}{H}\left\{M_\varphi \frac{\partial \chi}{\partial u} + N_\varphi \frac{\partial \chi}{\partial v}\right\} + \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial \chi}{\partial n}\,. \tag{15'}$$

Wir werden von dem letzteren Differentialausdruck öfters Gebrauch machen, daher schreiben wir ihn in entwickelter Form an:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial \chi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\left\{\alpha \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \chi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\right\}. \tag{16}$$

Führen wir dann nach der Bezeichnung von Herrn Beltrami *) das Symbol:

$$\Delta_1(\varphi, \chi)$$

für den ersten Teil des rechtsstehenden Ausdruckes in (15′) ein, d. h. setzen wir:

$$\frac{1}{H}\{M_\varphi \chi' + N_\varphi \chi_{,}\} = \Delta_1(\varphi, \chi), \tag{17}$$

so haben wir die Gaussischen Grössen in Form eines Differentialparameters, wie folgt:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \Delta_1(\varphi, \chi) + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \chi}{\partial n}. \tag{15'}$$

Aus dieser Gleichung können wir uns eine wichtige Hülfsformel verschaffen, indem wir an Stelle von φ der Reihe nach ξ, η, ζ setzen und beachten, dass letztere Funktionen von einander unabhängig sind, also die Derivierten der einen, genommen nach der andern verschwindet. So spaltet sich der Ausdruck (15') in drei reduzierte Formeln, für die wir allgemein schreiben:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Xi} = \Delta_1(\chi, \Xi) + A \frac{\partial \chi}{\partial n}, \tag{15_{1,2,3}}$$

wo Ξ und A gleichzeitig für ξ, α resp. für η, β oder für ζ, γ stehen.

Entwickeln wir die linke Seite der eben eingeführten Definitionsgleichung (17), welche im Sinne der durch die Ausdrücke (12_a, 12_b) festgesetzten Bezeichnungen schon abgekürzt ist, so bekommen wir für den Differentialparameter $\Delta_1(\varphi, \chi)$ den äquivalenten Ausdruck in den Gaussischen Grössen:

$$\Delta_1(\varphi, \chi) = \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u}\right) + E \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial v}}{H^2}. \tag{17_a}$$

Dieser Ausdruck ist der Beltramische sog. Zwischenparameter von zwei Funktionen: $\varphi(u, v)$ und $\chi(u, v)$ der Gaussischen krummlinigen Koordinaten. In den Definitionsgleichungen (12_a, 12_b und 17) für diesen Differentialparameter kommen die Funktionen ξ, η, ζ gar nicht vor; somit ist der Differentialparameter bezüglich der nach den Parametern genommenen Derivierten seiner Argumente (φ, χ),

*) Vergl. Beltrami's unter (1) cit. Abh. [p. 50 (1)].

von der Wahl des Koordinatensystems (ξ, η, ζ) unabhängig. Sind dann die beiden Funktionen φ und χ einander gleich, so reduziert sich der Zwischenparameter auf einen von der I[sten] Ordnung:

$$\varDelta_1 \varphi = \frac{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}{H^2}. \tag{18}$$

Schliesslich dienen die Gleichungen (12_a und 12_b) für die Herstellung des Differentialparameters II[ter] Ordnung, indem eine nach u, resp. nach v vorgenommene Differentiation und Addition der beiden Gleichungen das H-fache von dem Ausdruck liefert, welchen man mit dem Symbol $\varDelta_2 \varphi$ bezeichnet, sodass:

$$\varDelta_2 \varphi = \frac{1}{H}\{(M_\varphi)' + (N_\varphi)_,\} \tag{19}$$

und in entwickelter Form:

$$\varDelta_2 \varphi = \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{H}\right)\right\}. \tag{19$_a$}$$

7. **Das Prinzip der Green'schen Sätze mit Hülfe von Differentialparametern dargestellt.** Es sei das Doppelintegral*) vorgelegt:

$$\Pi = \iint \mu\, \varDelta_1(\varphi, \chi)\, H\, du dv \tag{20}$$

Die Integration ist über das Gebiet σ auszudehnen, welches ein durch die Kurve (s) begrenzter Teil einer gewissen Fläche Ω bildet.

In dem betrachteten Gebiet seien die Funktionen: μ, χ, φ eindeutig, endlich und stetig samt ihren ersten Differentialquotienten und von der Funktion φ noch auch die zweiten endlich und integrabel.

In den Gleichungen (9_A und 9_a) besitzen wir bereits Reduktionsformeln für das Flächenintegral, in denen die Gaussischen Grössen enthalten sind. Daher führen wir das vorgelegte Integral mittelst der Definitionsgleichung für den Differentialparameter (17) in die Gaussischen Grössen über:

$$\Pi = \int \mu\,(M_\varphi\, \chi' + N_\varphi\, \chi_,)\, du dv. \tag{20'}$$

---

*) Vergl. Beltrami, ibid. [p. 51—52].

Fasst man jede der Integranden (20′) als einen Bestandteil folgender Differentiationen auf:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mu\, M_\varphi\, \chi)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mu\, N_\varphi\, \chi)$$

und macht man bezüglich der so auftretenden Glieder von den Gleichungen (19) und (17) Gebrauch, dann geht das Integral (20′) über in:

$$\left.\begin{aligned} \Pi = & \iint\limits_{(\sigma)} [(\mu\, M_\varphi\, \chi)' + (\mu\, N_\varphi\, \chi)_{,}]\, du dv \\ & - \int\limits_{(\sigma)} [\mu\, \Delta_2\, \varphi + \Delta_1\, (\varphi, \mu)]\, \chi\, d\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (20''_{1,2})$$

worin der Beltramische Differentialparameter II[ter] Ordnung von der Funktion φ im Zusammenhang mit den Gaussischen Fundamentalgrössen auftritt. In dem ersten Teile vorstehenden Ausdruckes ($20''_1$) erkennen wir das Doppelintegral, welches wir durch eine partielle Integration, analog wie vorhin (Gleichungen 9_A u. 9_a) in ein Kurvenintegral umwandeln können.

Die citierten Gleichungen liefern folgendes Resultat, indem wir die Werte für M_φ und N_φ (aus 12_a und 12_b) einsetzen:

$$\iint\limits_{(\sigma)} [(\mu\, M_\varphi\, \chi)' + (\mu\, N_\varphi\, \chi)_{,}]\, du dv \qquad (20''_1)$$

$$= - \int\limits_{(s)} \mu\, \chi \left[\frac{E G - F^2}{H^2}\right] \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \nu}\right\} ds$$

$$= - \int\limits_{(s)} \mu\, \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, ds. \qquad (20'''_1)$$

Somit ist:

$$\Pi = \iint\limits_{(\sigma)} \mu\, \Delta_1\, (\varphi, \chi)\, H\, du dv$$

$$= - \int\limits_{(\sigma)} \{\mu\, \Delta_2\, \varphi + \Delta_1\, (\varphi, \mu)\}\, \chi\, d\sigma - \int\limits_{(s)} \mu\, \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, ds \qquad (20''')$$

Anhang zum I. und II. Abschnitt.

Tabelle für die wichtigsten Hülfsformeln.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial u} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\\ \frac{\partial G}{\partial v} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\end{aligned}\right\} \quad (2); \qquad \left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial v} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\\ \frac{\partial G}{\partial u} &= 2\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\end{aligned}\right\} \quad (2')$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\\ \sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\end{aligned}\right\} \quad (3')$$

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = F = 0_{\text{für } u \perp v} \quad (5)$$

$$\Delta_1(\varphi, \chi) = 0 \quad (5')$$

$$d\sigma = H\,du\,dv \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right\}\\ \beta &= \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right\}\\ \gamma &= \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}\right\}\end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \Delta_1(\varphi, \chi) + \frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial \chi}{\partial n} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial \xi} &= \Delta_1(\chi, \xi) + \alpha\frac{\partial \chi}{\partial n}\\ \frac{\partial \chi}{\partial \eta} &= \Delta_1(\chi, \eta) + \beta\frac{\partial \chi}{\partial n}\\ \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} &= \Delta_1(\chi, \zeta) + \gamma\frac{\partial \chi}{\partial n}\end{aligned}\right\} \quad (15a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\frac{\partial \chi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\left\{\alpha\frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial \chi}{\partial \eta} + \gamma\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}\right\} \quad (16)$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{H}\{M_\varphi \chi' + N_\varphi \chi_,\} = \varDelta_1(\varphi, \chi) && (17)\\
&\varDelta_1(\varphi, \chi) = \frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right) + E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial v}}{H^2} && (17_a)\\
&\varDelta_1\varphi = \frac{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{H^2} && (18)\\
&\varDelta_2\varphi = \frac{1}{H}\{(M_\varphi)' + (N_\varphi)_,\} && (19)\\
&\varDelta_2\varphi = \frac{1}{H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{H}\right)\right\} && (19_a)
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}
\Pi &= \iint\limits_{(\sigma)} \mu\, \varDelta_1(\varphi, \chi)\, H\, du\, dv\\
&= -\int\limits_{(\sigma)} \{\mu\, \varDelta_2\varphi + \varDelta_1(\varphi, \mu)\}\, \chi\, d\sigma - \int\limits_{(s)} \mu\, \chi\, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, ds. \qquad (20''')
\end{aligned}$$

(A.)

Dritter Abschnitt.

III. Entwickelung der allgemeinsten Formel für die zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht.

8. **Die funktionentheoretischen Bedingungen für die zweiten Derivierten des V-Potentials** seien im Folgenden festgesetzt, obwohl es möglich*) ist, die Schlüsse unter allgemeineren**) Voraussetzungen zu machen:

---

*) Lipschitz'sche Bedingungen für die Integrabilität der Differentialausdrücke.

**) A. Liapounoff: Sur certaines questions se rattachant au problème de Dirichlet. (Compte rendu 125, pag. 808—810 [1897]). Der Verfasser stellt einen Satz für die Stetigkeit der normalen Derivierten (dérivée normale) des Flächenpotentials auf.

Die Dichtigkeitsfunktion h soll auf der Fläche samt ihren ersten Derivierten eindeutig, stetig und mit ihren zweiten Derivierten endlich und integrabel sein.

Wir betrachten diese Bedingungen von vornherein als erfüllt; sie sind hinreichend dafür, dass die zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht eindeutig und stetig seien auch dann, wenn der variable Punkt $(x\,y\,z)$ in die unmittelbare Nähe der Fläche herantritt.

Es haben also infolge der Voraussetzung von der Funktion h die ersten und zweiten Derivierten, genommen nach den Gaussschen krummlinigen Koordinaten, eine bestimmte Bedeutung.

Soll dann für einen gewissen Teil der Untersuchung die Derivierte von h auch in Bezug der Normale (n) eine Existenz haben, so muss es eine Funktion geben, die ausserhalb, aber bis in die unmittelbarste Nähe der Fläche heran so beschaffen ist, wie die Dichtigkeitsfunktion h auf der Fläche selbst. Dann reduziert sich jene Funktion für die Fläche auf die Werte von h und es lässt sich die Derivierte $\frac{\partial h}{\partial n}$ bilden.

9. aa) **Differentiation des Ausdruckes für die erste Derivierte nach der x-Koordinate des variablen Punktes.** Wir knüpfen unsere Untersuchungen an folgende Formel*) an:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{h\,\Delta_2 \xi + \Delta_1(h,\xi)}{r}\,d\sigma - \int h\,\alpha\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma \\ + \int h\,\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\,\frac{ds}{r}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Wir richten unser Augenmerk vor allem auf die Beschaffenheit der unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen, resp. ihr Verhalten gegenüber dem Punkte $(x\,y\,z)$, nach welchem wir die Derivierten bilden wollen. Dabei bedienen wir uns des in den potential-theoretischen Untersuchungen üblichen Kunstgriffs und führen die Differentiation bezüglich derjenigen Funktionen, die von dem Aufpunkte (der variable Punkt) in der Verbindung: $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = r^2$ abhängen, nach dem Integrationspunkte $(\xi\,\eta\,\zeta)$ aus. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = -\frac{\partial}{\partial \xi}\psi,$$

*) Siehe Beltrami, ibid. (Formel 4).

wenn ψ dieselbe Bedeutung hat wie in Art. 1. Führen wir ψ an Stelle von $\frac{1}{r}$ (in II) ein, so haben wir als Ausgangsformel:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} = \int \{h\, \Delta_2\, \xi + \Delta_1\,(h, \xi)\}\, \psi\, d\sigma - \int h\, \alpha\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \\ + \int h\, \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\, \psi\, ds\end{aligned}\right\}. \tag{II$_a$}$$

Wir nehmen die Differentiation an den drei Bestandteilen, die den Charakter verschiedener Art von Potentialen zeigen, der Reihe nach vor und bezeichnen sie nach der Differentiation mit $\int\limits_{Vx}$, $\int\limits_{Wx}$ resp. mit $\int\limits_{Rx}$, um zugleich anzudeuten, dass sie aus dem Potential einer einfachen-, einer Doppelfläche, resp. des Randes entwickelt worden sind.

Die Dichtigkeitsfunktion, welche durch den Klammerausdruck repräsentiert ist (im ersten Integral der Formel II$_a$), soll der Voraussetzung nach Funktion der Fläche sein; ξ ist die Koordinate eines Flächenpunktes und α als ein Richtungscosinus der Normale ist allein durch die Fläche bedingt. Folglich sind ausser ψ alle Funktionen von dem variablen Punkt $(x\,y\,z)$ völlig unabhängig und also in der nach x, resp. y, z vorzunehmenden Differentiation als Konstante zu behandeln. Somit kann der zu derivierende Ausdruck gänzlich in Funktionen der Fläche dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{Vx} &= \int \{h\, \Delta_2\, \xi + \Delta_1\,(h, \xi)\}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \psi\, d\sigma \\ &= -\int \{h\, \Delta_2\, \xi + \Delta_1\,(h, \xi)\}\, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\, d\sigma\end{aligned}\right\}. \tag{21$_a$}$$

Wenden wir die früher entwickelte Gleichung (15_1) auf letzteres Integral an, indem wir ein für allemal $\chi = \psi$ setzen und also der Funktion ψ die Eigenschaft beilegen, dass sie samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktion der u, v, n, resp. ξ, η, ζ sei. Somit zerfällt das Integral in zwei Teile:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{Vx} = -\int\limits_{1} \Big[\{h\, \Delta_2\, \xi + \Delta_1\,(h, \xi)\} \cdot \Delta_1\,(\psi, \xi)\Big]\, d\sigma \\ - \int\limits_{2} \Big[\{h\, \Delta_2\, \xi + \Delta_1\,(h, \xi)\} \cdot \alpha\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big]\, d\sigma\end{aligned}\right\}. \tag{21$_a$)^{1,2}}$$

Für das erste Integral $(21_a)^{\mathrm{I}}$ machen wir von der Reduktionsformel (20‴) Gebrauch, worin das Green'sche Prinzip dargelegt wurde. Wenden wir die Formel bezüglich der ersten Derivierten der Funktionen ψ, ξ an, so ist jene ohne weitere Untersuchung gültig, wenn die ersten Derivierten dieser Funktionen stetig und die zweiten der ξ endlich und integrabel sind. Das als Faktor auftretende Aggregat der Dichtigkeitsfunktion, also die zweiten Derivierten von ξ und die ersten der Dichtigkeitsfunktion h selbst, soll dabei stetig sein. Es sind zu ersetzen in (20‴):

$$\begin{array}{lcl} \mu & \text{durch} & \{h \qquad\} \\ \chi & \text{„} & \psi \\ \varphi & \text{„} & \xi \end{array}$$

Infolge der (in Art. 2) festgestellten Flächenbedingungen sind für E, F, G die zweiten, d. h. von ξ noch die dritten Derivierten endlich, integrabel angenommen, und also die Funktionen, für welche hier die Reduktionsformel gelten soll, teilweise noch höheren Anforderungen genügen, als für diese Operationen verlangt sind. Das Integral $\int_1$ erhält dann die Form:

$$\left.\begin{aligned} \int_1 = & \int \Big[\big\{h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\big\}\,\varDelta_2\xi + \varDelta_1\Big\{\big(h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\big),\xi\Big\}\Big]\,\psi\,d\sigma \\ & + \int_{(s)} \{h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\}\,\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\,\psi\,ds. \end{aligned}\right\} (21_a)^{\mathrm{I}}$$

Somit lautet der erste Bestandteil $\left(\int_{Vx}\right)$ der Entwickelung für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$:

$$\left.\begin{aligned} \int_{Vx} = & \int \varDelta_2\,\xi\,\big\{h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\big\}\,\psi\,d\sigma + \int \varDelta_1\Big\{\big(h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\big),\xi\Big\}\psi\,d\sigma \\ & - \int \alpha\cdot\{h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\}\,\frac{\partial \psi}{\partial n}\,d\sigma \\ & + \int_{(s)} \{h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\}\,\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\,\psi\,ds. \end{aligned}\right\} (21_A)$$

Betrachten wir etwas näher die Bedeutung der symbolischen Operationen, um uns dann aus dem Schlussresultat Rechenschaft geben zu können, inwiefern es zweckmässig war, die in Art. 2 angenommenen Flächenbedingungen aufzustellen.

Aus der Definitionsgleichung (19_a) geht hervor, dass der Differentialparameter $\varDelta_2 \xi$ die zweiten Derivierten der Funktion ξ enthält, und auf Grund der bekannten Relation:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v}\right)}{\partial u \, \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)\right)^2}{\partial v^2} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v}, \tag{22}$$

die sich durch Differentiation nach v aus dem einen Bestandteile $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v}$ der Ableitung $\frac{\partial F}{\partial u}$ ergiebt, lässt das Glied:

$$\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2,$$

welches in dem Produkt $\varDelta_2 \xi \cdot \varDelta_2 \xi$ zum Vorschein kommt, schon das Auftreten der d r i t t e n Ableitungen von ξ zu.

Die Entwickelung des Ausdruckes:

$$\varDelta_1 \left\{\left(h \, \varDelta_2 \, \xi + \varDelta_1 (h, \xi)\right), \xi\right\} \tag{23}$$

weist die dritten Ableitungen von ξ, d. h. die zweiten der Fundamentalgrössen E, F, G n o t w e n d i g auf. Sie involviert nämlich folgende Operationen:

$$= \varDelta_1 \{h \, \varDelta_2 \, \xi, \xi\} + \varDelta_1 \{\varDelta_1 (h, \xi), \xi\} \tag{23'}$$

$$= h \cdot \varDelta_1 (\varDelta_2 \, \xi, \xi) + \varDelta_2 \, \xi \cdot \varDelta_1 (h, \xi) + \varDelta_1 \{\varDelta_1 (h, \xi), \xi\}. \tag{23''}$$

Das Glied $\varDelta_1 \{h \, \varDelta_2 \, \xi, \xi\}$ ist nach dem Satze der Differentiation eines Produkts (zufolge der Gleichung 17_a) in zwei Summanden gespalten, wie es aus der Gleichung (23'') hervorgeht. Betrachtet man die Ausdrücke:

$$\varDelta_1 \left((\quad), \xi\right) \text{ und } \left(\varDelta_2 \, \xi, \xi\right),$$

welche nach den Definitionsgleichungen (17_a) und (19_a) die Grössen E, F, G, resp. ihre ersten Derivierten enthalten, wieder als Argumente des Symbols $\varDelta_1$, so treten die ersten, resp. zweiten Derivierten der Fundamentalgrössen auf, da das Symbol $\varDelta_1$ betreffend seiner Argumente eine nach u und v vorzunehmende Differentiation bedeutet.

Nach diesen Erörterungen über die Bedeutung der zum Vorschein gebrachten Funktionen führen wir unsere Entwickelung weiter.

In dem zweiten Bestandteile des vorgelegten Ausdruckes (II_a) für $\frac{\partial V}{\partial x}$ ist die Dichtigkeitsfunktion von der Form:

$$h\alpha.$$

Wir wollen sie als das Moment einer Doppelbelegung auffassen und schreiben ihr die Bedingungen vor, denen ein Moment Genüge leisten soll, wenn man bezüglich der Doppelfläche noch die ersten Derivierten des Potentials bilden will. Die Dichtigkeitsfunktion $h\alpha$ soll also das Produkt aus der Flächendichte in eine Vektorgrösse repräsentieren und zwar in eine unendlich kleine Strecke (δn), welche die Entfernung der beiden Seiten der Fläche in der Richtung der Normale misst. Dadurch will gesagt sein, dass $h\alpha$ in gleicher Weise differentiierbar sein soll, wie das Moment $h \cdot \delta n$, welches wir kurzweg mit g bezeichnen wollen. Und das thut es in der That, da α, als der Richtungscosinus der Normale, vermittelst der Normale ebenso Funktion der Fläche ist, also der Parameter (u, v), wie δn selbst.

Um an dieses Verhalten der Dichtigkeitsfunktion $h\alpha$ zu erinnern, legen wir ihr die Bezeichnung eines Momentes bei. Wir wollen für die Zwecke der Umformungen

$$-h\alpha = g_\alpha \tag{24}$$

setzen.

Diese Art Dichtigkeitsfunktion g_α ist von dem variablen Punkt $(x\,y\,z)$ ebenfalls unabhängig, somit gestaltet sich die Differentiation des Gliedes:

$$-\int h\alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma, \qquad \text{(in } II_a)$$

welches den zweiten Bestandteil für die Entwickelung von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ liefert, folgendermassen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Wx} &= -\int h\alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \\
&= \int g_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \qquad (21_b) \\
&= \int g_\alpha \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right\} d\sigma \\
&= -\int g_\alpha \left\{ \alpha \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta\, \partial \xi} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta\, \partial \xi} \right\} d\sigma. \qquad (21_\beta)
\end{aligned}$$

Zur Umformung der gewonnenen Derivierten (in 21_β) nehmen wir an, dass ausserhalb der Fläche eine Funktion existiert, die so beschaffen ist (vergl. Art. 8), dass sie auf der Fläche die Werte von g_a annimmt. Dann hat die Derivierte einer solchen Funktion, genommen nach dem Aufpunkte und infolge der Verbindung $\sum (x - \xi)^2 = r^2$ nach dem Integrationspunkte ξ ebenfalls eine Bedeutung auch für den Wert von g_a.

Wir sind umsomehr berechtigt, von einer solchen hypothetischen Funktion im Laufe der Umformungen Gebrauch zu machen, als dadurch das Schlussresultat nicht beeinträchtigt wird, da sich die Derivierten der Dichtigkeitsfunktion g_a, genommen nach den Koordinatenachsen ξ, η, ζ, resp. nach der Normale (n), in der Form:

$$\frac{\partial g_a}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

schliesslich wegheben.

Bei dem gemachten Ansatz können wir die Derivierten in der Gleichung (21_β) als Bestandteile folgender Differentiation (vergl. die Umformung der Gleichung 20′) ansehen:

$$A \frac{\partial}{\partial \xi}\left(g_a \frac{\partial \psi}{\partial \Xi}\right) = A\, g_a \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \Xi} + A \frac{\partial g_a}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \Xi}, \tag{25}$$

wo A und Ξ gleichzeitig durch α und ξ; β, η resp. γ, ζ zu ersetzen sind.

Die Summe der letzten Glieder in den drei analogen Identitäten, die in (25) enthalten sind, liefert:

$$\frac{\partial g_a}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Dieses Glied ist also mit dem richtigen Vorzeichen in den Integralausdruck (21_β) einzuführen, wenn wir für den Integranden die linke Seite der Identität (25) setzen, sodass der Ausdruck (21_β) übergeht in:

$$\left.\begin{aligned}\int_{Wx} = \int \frac{\partial g_a}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \quad (21'_\beta)\\ -\int \Bigg[\underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(g_a \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)\right\}}_{(a)} \alpha + \underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(g_a \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)\right\}}_{(b)} \beta + \underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(g_a \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)\right\}}_{(c)} \gamma \Bigg] d\sigma & \quad (21''_\beta)\end{aligned}\right\}$$

Denken wir an Stelle der Klammergrössen in den Derivierten (a), (b), (c) je eine einzige Funktion:

$$\left.\begin{array}{l} g_a \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdots\cdots A \\ g_a \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \cdots\cdots B \\ g_a \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdots\cdots \Gamma \end{array}\right\} \qquad (26)$$

gesetzt, welche samt ihren Derivierten so beschaffen sind, wie das Moment g_a, so erkennen wir unmittelbar gewisse partikulare Ausdrücke der Stokes'schen Formel, und wir können die einzelnen Flächenintegrale des Ausdruckes ($21''_\beta$), welche im Sinn des Stokesschen Theoremes nur abhängen von der Natur der Begrenzungskurve, teilweise je auf ein Kurvenintegral reduzieren.

Erfolgt der Umlauf des Integrationsweges (s) in Bezug auf die Flächennormale in dem gleichen Sinn, welcher für das Koordinatensystem als positiver Drehungssinn festgestellt wurde (Art. 4_a, 5_b), so besteht die folgende Gleichung mit den Vorzeichen:

$$\left.\begin{array}{l} \int\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \zeta}\right) \alpha\, d\sigma + \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\right) \beta\, d\sigma + \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta}\right) \gamma\, d\sigma \\ = \int\limits_{(s)} A\, d\xi + B\, d\eta + \Gamma\, d\zeta \end{array}\right\} \qquad (27)$$

als der bekannte Ausdruck des Stokes'schen Theoremes.

In dem Integralausdruck (27) bedeuten A, B, Γ Funktionen, die samt ihren ersten Derivierten auf dem betrachteten Flächengebiet eindeutig, stetig sind.

Die Integrationsvariabeln $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sind die Projektionen eines Wegelementes (ds) auf die betreffende Koordinatenachse und:

$$\begin{array}{ll} \alpha\, d\sigma = \cos(n\,\xi)\, d\sigma & = d\eta\, d\zeta \\ \beta\, d\sigma & = d\zeta\, d\xi \\ \gamma\, d\sigma & = d\xi\, d\eta \end{array}$$

stellen die Projektionen des Flächenelementes ($d\sigma$) auf die

$\eta\,\zeta$-
$\zeta\,\xi$-
$\xi\,\eta$-Ebene,

u. zw. mit dem positiven Vorzeichen dar, wenn den projizierten Kurvenelementen ($d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$) eine positive Umlaufsrichtung mitgeteilt wurde.

Mittelst dieser Flächenprojektionen lassen sich die Funktionen A, B, Γ ausdrücken, sie liefern die einzelnen Bestandteile zu den Doppelgliedern des Satzes (27):

Fig. 6.

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{ocabo} A\,d\xi &= \int\left\{\frac{\partial A}{\partial \zeta}\beta - \frac{\partial A}{\partial \eta}\gamma\right\}d\sigma\\ \int\limits_{oabco} B\,d\eta &= \int\left\{\frac{\partial B}{\partial \xi}\gamma - \frac{\partial B}{\partial \zeta}\alpha\right\}d\sigma\\ \int\limits_{obcao} \Gamma\,d\zeta &= \int\left\{\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}\alpha - \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}\beta\right\}d\sigma\end{aligned}\right\}(27_{a\ldots c})$$

in einfachster Weise, wenn man die Beziehungen zwischen Begrenzung und Flächeninhalt für ein Dreieck betrachtet. (Fig. 6.)

Aus dem Gleichungssystem ($27_{a\ldots c}$) durch Anwendung der Substitutionen (26) ergeben sich die Reduktionsformeln für die Flächenintegrale (a), (b), (c) unmittelbar. Wir führen jene Substitutionen nur betreffend der Integrale (b) und (c) aus, da wir von (a) kein Gebrauch machen wollen. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{(s)} g_a\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\,d\eta &= \int\limits_{(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g_a\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\gamma\,d\sigma - \int\limits_{(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(g_a\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\alpha\,d\sigma\\ \int\limits_{(s)} g_a\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\zeta &= \int\limits_{(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(g_a\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\alpha\,d\sigma - \int\limits_{(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g_a\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\beta\,d\sigma\end{aligned}\right\}(27_{\beta,\gamma})$$

Setzen wir die so gefundenen Werte für die Ausdrücke (b) und (c) in das Integral ($21''_\beta$) ein, dann erscheinen die auf Linienintegrale reduzierten Formen, und die substituierten Flächenintegrale haben den Vorteil über die ursprünglichen Doppelintegrale, dass sie in Bezug auf die Koordinaten symmetrisch sind.

Somit gestaltet sich der Ausdruck für $\int\limits_{Wx}$ folgendermassen:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{Wx} = & \int \frac{\partial g_a}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial n}\,d\sigma & (21'_\beta)\\ & -\int\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(g_a\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(g_a\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(g_a\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)\right\}\alpha\,d\sigma & (21_\beta)^2\\ & -\int\limits_{(s)} g_a\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\,d\eta-\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\,d\zeta\right). & (21_\beta)^3\end{aligned}\right|$$

Setzen wir dann der Kürze halber:

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{(s)} g_a\,\psi\,d\xi = X\\ &\int\limits_{(s)} g_a\,\psi\,d\eta = Y \cdots\cdot \text{ sodass } \int\limits_{(s)} g_a\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\,d\eta = \frac{\partial Y}{\partial \zeta} = -\frac{\partial Y}{\partial z}\\ &\int\limits_{(s)} g_a\,\psi\,d\zeta = Z \cdots\cdot \quad " \quad \int\limits_{(s)} g_a\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\,d\zeta = \frac{\partial Z}{\partial \eta} = -\frac{\partial Z}{\partial y}\end{aligned}\right\};\quad (28)$$

führen wir ferner das Symbol ∇^2 für die Laplace'sche Operation, also für die Summe der zweiten Derivierten, genommen nach den Koordinatenrichtungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

ein, so können wir das mit $(21_\beta)^2$ bezeichnete Flächenintegral folgendermassen schreiben:

$$(21_\beta)^2 \text{ geht über in: } \left.\begin{aligned}&-\int g_a\,\alpha\,\nabla^2\psi\,d\sigma \;{}^{*})\\ &-\int\left(\sum\frac{\partial g_a}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)\alpha\,d\sigma\end{aligned}\right\}. \qquad (21_{\beta\beta})^2$$

*) In einem analogen Glied für die ersten Derivierten des Doppelflächenpotentials fehlt der Faktor α bei Hrn. Beltrami (vergl. ibid. p. 55, Formel 6_a). Doch wird dadurch seine definitive Formel nicht beeinträchtigt, weil er das Schlussresultat von dem Attraktionsgesetz nicht unabhängig macht. Infolgedessen verschwindet das Glied, an welchem die Laplace'sche Operation angedeutet ist, ausser der Fläche überall.

Im Sinn der Gleichung für die Kraftkomponente X:

$$\sum\frac{m\,d\frac{1}{r}}{dx} = \frac{d\,\Sigma\frac{m}{r}}{dx}$$

Mit Hülfe der Umformungsgleichungen (15_1), (15^I) [s. Tabelle], resp. der Substitutionen (28) gehen in dem Ausdruck für $\int\limits_{Wx}$ die einzelnen Integrale, nämlich:

$$\int\limits_{Wx} = (21'_\beta) \text{ über in: } \int \Delta_1(g_\alpha, \xi)\frac{\partial \psi}{\partial n}\,d\sigma + \int \alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n}\,d\sigma \quad (21_\beta)^{\mathrm{I}}$$

$$(21_{\beta\beta})^2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad -\int \Delta_1(g_\alpha, \psi)\,\alpha\,d\sigma - \int \alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n}\,d\sigma - \int \alpha\, g_\alpha \nabla^2 \psi\, d\sigma \quad (21_{\beta\beta})^{\mathrm{II}}$$

$$(21_\beta)^3 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}. \quad (21_\beta)^{\mathrm{III}}$$

Wollen wir schliesslich das Flächenintegral:

$$-\int \Delta_1(g_\alpha, \psi)\cdot \alpha\, d\sigma$$

teilweise auf ein Kurvenintegral reduzieren, so machen wir von einer Art Green'schen Umformung (20''') Gebrauch. Diese Operation erfordert die Endlichkeit und Integrierbarkeit der zweiten Derivierten der Dichtigkeitsfunktion ($g_\alpha = -h\alpha$), welche Bedingung nach unserer Voraussetzung erfüllt ist. So können wir für das vorstehende Flächenintegral setzen:

$$\int \{\alpha\, \Delta_2\, g_\alpha + \Delta_1(g_\alpha, \alpha)\}\, \psi\, d\sigma + \int\limits_{(s)} \alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \nu}\, \psi\, ds,$$

sodass der zweite Bestandteil $\left(\int\limits_{Wx}\right)$ unserer Entwickelung für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ lautet:

---

stellt nämlich der Ausdruck in der Gleichung $(21_{\beta\beta})^2$:

$$-\int \nabla^2 (g_\alpha \cdot \alpha)\frac{1}{r}\, d\sigma$$

die Summe der 2ten Derivierten von einem Potential dar, d. h. die linke Seite der Laplace'schen Differentialgleichung, und ist also gleich Null, wenn man von dem Attraktionsgesetz nicht abstrahiert.

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{Wx} &= \int\left\{\alpha\,\varDelta_2\,g_a + \varDelta_1\,(g_a, \alpha)\right\}\psi\,d\sigma - \int \alpha\,g_a\,\nabla^2\,\psi\,d\sigma \\ &+ \int \varDelta_1\,(g_a, \xi)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma \\ &+ \int \alpha\,\frac{\partial g_a}{\partial\nu}\,\psi\,ds + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \quad (21_B)$$

Wir entwickeln noch den dritten Bestandteil $\left(\int\limits_{Rx}\right)$ für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$:

$$\int\limits_{Rx} = \int\left(h\,\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\right)\frac{\partial}{\partial x}\,\psi\,ds \quad (21_c)$$

$$= -\int h\,\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,ds \quad (21_\gamma)$$

$$\left.\begin{aligned}&= -\int h\,\varDelta_1\,(\psi, \xi)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,ds \\ &\quad -\int h\,\alpha\,\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds\end{aligned}\right\}. \quad (21_\Gamma)$$

ab) **Randpotentiale.** Betrachten wir in allen drei Bestandteilen (21_A, 21_B, 21_Γ) die Integrale, die sich über eine Kurve erstrecken, die also Potentiale von linearer Massenverteilung darstellen.

Zu diesem Zwecke führen wir zunächst das Glied:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{dy}$$

(in 21_B) auf die ursprüngliche Gestalt zurück und formen dann um. Wir erhalten für:

$$-\frac{\partial Z}{\partial y} = \int\limits_{(s)} g_a\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\zeta$$

$$= \int\limits_{(s)} g_a\,\varDelta_1\,(\psi, \eta)\cdot d\zeta + \int\limits_{(s)} \beta\,g_a\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\zeta. \quad (21_{B\gamma})$$

Analoges ergiebt sich für $\frac{\partial Y}{\partial z}$.

Wir finden, dass im Randglied $\int\limits_{Rx}$ (Gleichung 21_Γ) ausschliesslich solche Potentiale auftreten, die sich auf die Begrenzung der Fläche beziehen. Die Anwesenheit des Gliedes $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ deutet an, dass dieser Rand einer Art Doppelfläche angehört. Von ähnlicher Struktur ist das zweite Integral von ($21_{B\gamma}$); an Stelle von ds tritt aber hier als Integrationsvariable seine Projektion auf, d. h. die Massenverteilung ist nicht auf der Begrenzung selbst, sondern auf ihrer Projektion zu denken.

Durch (21_A) wird ein Randpotential geliefert, dessen Gestalt zeigt, dass die Massenverteilung auf dem Rand einer einfachen Fläche sich befindet.

Ein analoges Glied tritt in (21_B) auf.

Für eine geschlossene Fläche verschwinden alle diese auf lineare Massenverteilung bezogenen Potentiale im Sinn des Stokesschen Theoremes.

Wir können nämlich durch eine Kurve (l) die geschlossene Fläche (σ) in zwei Flächenstücke zerlegt denken. Dann ist für beide Teile das durch die Stokes'sche Formel ausgedrückte Flächenintegral gleich dem Ausdruck, der folgt:

$$\int\limits_{(l)} \{A \cos(l\xi) + B \cos(l\eta) + \Gamma \cos(l\zeta)\}\, dl. \qquad (27_A)$$

Wenn aber die Begrenzung beider Flächenstücke im festgesetzten Integrationssinn durchlaufen wird, muss die Umlaufsrichtung von l das eine Mal entgegengesetzt sein, wie das andere Mal, sodass die Summe der beiden Teilintegrale Null wird, d. h. das Randintegral verschwindet.

ac) **Die Zusammenstellung der Bestandteile 21_A, 21_B, 21_Γ.** Ordnen wir die entstandenen Ausdrücke nach den Doppel- und Linienintegralen und zugleich nach der Funktion ψ und ihrer Derivierten $\left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)$ bezüglich der Normale; stellen wir dann für g_a die ursprüngliche Gestalt, nämlich $-ha$ wieder her, so lautet der vollständige Ausdruck für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, der alle Möglichkeiten in sich schliesst, folgendermassen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = & \int \Delta_2 \xi \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\} \psi \, d\sigma \\
& + \int \Delta_1 \left\{ \left(h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi) \right), \xi \right\} \psi \, d\sigma \\
& - \int \{\alpha \Delta_2 (h\alpha) + \Delta_1 (h\alpha, \alpha)\} \psi \, d\sigma \; {}^{*)} \\
& - \int \alpha \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \\
& - \int \Delta_1 (h\alpha, \xi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \qquad \text{(III}_a\text{)} \\
& - \int \alpha \frac{\partial (h\alpha)}{\partial \nu} \psi \, ds \\
& + \int \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \psi \, ds \\
& - \int h\alpha \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \\
& - \int h \Delta_1 (\psi, \xi) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \nu} ds \\
& + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

Wir führen folgende Abkürzungen in den Ausdrücken für die Dichtigkeitsfunktion ein, um das Schema der Formel mehr hervortreten zu lassen:

$$
\begin{aligned}
h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi) &= \mathfrak{H}_\xi \\
\Delta_2 \xi \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\} &= \mathfrak{H}_{\xi\xi} \\
\alpha \Delta_2 (h\alpha) + \Delta_1 (h\alpha, \alpha) &= \mathfrak{H}_A \\
h\alpha &= h_1.
\end{aligned}
$$

---

*) Das Glied:
$$\int \alpha^2 \cdot h \nabla^2 \psi \, d\sigma,$$
wie die vorangegangene Entwickelung zeigt, kommt noch für den Fall hinzu, wenn man die Unabhängigkeit von dem Attraktionsgesetz, wonach die Laplace'sche Differentialgleichung für einen ausser der anziehenden Fläche befindlichen Aufpunkt $(x\,y\,z)$ den Wert Null hat, entsprechend dem ganzen Entwickelungsgang auch in der Darstellung der definitiven Formel bewahrt.

So heisst die Formel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = & \int \{\mathfrak{H}_{\xi\xi} + \varDelta_1(\mathfrak{H}_\xi, \xi) - \mathfrak{H}_A\} \psi\, d\sigma \text{ *)} \\ & - \int \{\alpha \cdot \mathfrak{H}_\xi + \varDelta_1(h_1, \xi)\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \\ & + \int \left\{\mathfrak{H}_\xi \psi - h_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} - h\, \varDelta_1(\psi, \xi)\right\} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} ds \\ & - \int \alpha \frac{\partial h_1}{\partial \nu} \psi\, ds + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.\end{aligned} \qquad (\mathrm{III}_a)$$

b) Die zweiten Derivierten nach den andern Koordinaten des variabeln Punktes erhält man durch einfache Buchstabenvertauschung aus der Formel, die wir in Bezug auf die x-Koordinate explicite berechnet haben.

Für die Derivierte nach der y-Koordinate wollen wir demnach den Entwickelungsgang nur andeuten, ohne dabei durch die Details den Zusammenhang zu unterbrechen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \int \{h\, \varDelta_2 \eta + \varDelta_1(h, \eta)\} \frac{\partial \psi}{\partial y} d\sigma - \int h \beta \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial n}}{\partial y} d\sigma \\ + \int h \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} ds\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$\int_{Vy} = - \int \{h\, \varDelta_2 \eta + \varDelta_1(h, \eta)\} \varDelta_1(\psi, \eta)\, d\sigma - \int \{h\, \varDelta_2 \eta + \varDelta_1(h, \eta)\} \beta \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma$$

$$\left.\begin{aligned} = & \int \{h\, \varDelta_2 \eta + \varDelta_1(h, \eta)\} \varDelta_2 \eta \cdot \psi\, d\sigma \\ & + \int \varDelta_1 \left\{\left(h\, \varDelta_2 \eta + \varDelta_1(h, \eta)\right), \eta\right\} \psi\, d\sigma \\ & + \int \{h\, \varDelta_2 \eta + \varDelta_1(h, \eta)\} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \psi\, ds \\ & - \int \beta\, \{h\, \varDelta_2 \eta + \varDelta_1(h, \eta)\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma\end{aligned}\right\} \quad (29_A).$$

*) Siehe Fussnote auf Seite 35.

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{Wy} = \;& \int \{\beta\, \varDelta_2\, g_\beta + \varDelta_1\, (g_\beta, \beta)\}\, \psi\, d\sigma - \int g_\beta \cdot \beta\, \nabla^2\, \psi\, d\sigma \\ & + \int \varDelta_1\, (g_\beta, \eta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \\ & + \int \beta\, \frac{\partial g_\beta}{\partial \nu}\, \psi\, ds + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (29_B)$$

$$\int\limits_{Ry} = -\int h\, \varDelta_1\, (\psi, \eta) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\, ds - \int h\, \beta\, \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds. \qquad (29_\Gamma)$$

Sodass:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \;& \int \varDelta_2\, \eta\, \{h\, \varDelta_2\, \eta + \varDelta_1\, (h, \eta)\}\, \psi\, d\sigma \\ & + \int \varDelta_1\, \Big\{\Big(h\, \varDelta_2\, \eta + \varDelta_1\, (h, \eta)\Big), \eta\Big\}\, \psi\, d\sigma \\ & - \int \{\beta\, \varDelta_2\, (h\beta) + \varDelta_1\, (h\beta, \beta)\}\, \psi\, d\sigma \;{}^{*)} \\ & - \int \beta\, \{h\, \varDelta_2\, \eta + \varDelta_1\, (h, \eta)\}\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \\ & - \int \varDelta_1\, (h\beta, \eta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \\ & - \int \beta\, \frac{\partial\, (h\beta)}{\partial \nu}\, \psi\, ds \\ & + \int \Big[\{h\, \varDelta_2\, \eta + \varDelta_1\, (h, \eta)\}\, \psi - h\beta\, \frac{\partial \psi}{\partial n} - h\, \{\varDelta_1\, (\psi, \eta)\}\Big]\, \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\, ds \\ & + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}.\end{aligned} \qquad (\mathrm{III_b})$$

---

*) Das Glied:

$$\int \beta^2 \cdot h\, \nabla^2\, \psi\, d\sigma$$

für den erwähnten Fall kommt noch hinzu.

c) $$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \int \Delta_2 \zeta \{h \Delta_2 \zeta + \Delta_1 (h, \zeta)\} \psi \, d\sigma$$
$$+ \int \Delta_1 \Big\{\Big(h \Delta_2 \zeta + \Delta_1 (h, \zeta)\Big), \zeta\Big\} \psi \, d\sigma$$
$$- \int \{\gamma \Delta_2 (h\gamma) + \Delta_1 (h\gamma, \gamma)\} \psi \, d\sigma \text{ *)}$$
$$- \int \gamma \{h \Delta_2 \zeta + \Delta_1 (h, \zeta)\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma$$
$$- \int \Delta_1 (h\gamma, \zeta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \qquad (\mathrm{III_c}).$$
$$- \int \gamma \frac{\partial (h\gamma)}{\partial \nu} \psi \, ds$$
$$+ \int \Big[\{h \Delta_2 \zeta + \Delta_1 (h, \zeta)\} \psi - h\gamma \frac{\partial \psi}{\partial n} - h \{\Delta_1 (\psi, \zeta)\}\Big] \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} ds$$
$$+ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

10. **Die in x und y gemischte Derivierte eines V-Potentials.** Wir differenzieren die nach x genommene erste Ableitung ($\mathrm{II_a}$) in Bezug auf y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial y} = \int \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\} \frac{\partial \psi}{\partial y} d\sigma - \int h\alpha \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial n}}{\partial y} d\sigma \\ + \int h \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} ds \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

$$\int_{Vxy} = - \int \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\} \Delta_1 (\psi, \eta) \, d\sigma - \int \beta \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma$$

---

*) Die Anwesenheit des Gliedes:

$$\int \gamma^2 \cdot h \nabla^2 \psi \, d\sigma$$

deutet die Unabhängigkeit der Formel von dem Attraktionsgesetz an, entsprechend der Entwickelung.

$$\int\limits_{Vxy} = \int \{h\,\Delta_2\,\xi + \Delta_1\,(h,\xi)\}\,\Delta_2\,\eta\,\psi\,d\sigma + \int \Delta_1\,\Big\{\big(h\,\Delta_2\,\xi + \Delta_1\,(h,\xi)\big),\,\eta\Big\}\,\psi\,d\sigma + \int \{h\,\Delta_2\,\xi + \Delta_1\,(h,\xi)\}\,\frac{\partial\eta}{\partial\nu}\,\psi\,ds - \int \beta\,\{h\,\Delta_2\,\xi + \Delta_1\,(h,\xi)\}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma \qquad (30_A)$$

$$\int\limits_{Wxy} = \int \frac{\partial g_a}{\partial\eta}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma - \int \left[\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(g_a\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\right\}\alpha + \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(g_a\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\right\}\beta + \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(g_a\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\right\}\gamma\right]\psi\,d\sigma \qquad (30_\beta)$$

$$= \int \frac{\partial g_a}{\partial\eta}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma - \int \beta\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g_a\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(g_a\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(g_a\,\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\right\}d\sigma + \int\limits_{(s)} g_a\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\,d\xi - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\zeta\right). \qquad (30'_\beta)$$

Die Reduktion der Flächenintegrale ist hier durch Anwendung des Stokes'schen Satzes ($27_{a\ldots c}$) vorgenommen.

Führt man noch eine Umwandlung der Doppelintegrale in Linienintegrale nach dem Prinzip der Green'schen Theoreme aus (20'''), so erhält man:

$$\int\limits_{Wxy} = \int \{\beta\,\Delta_2\,g_a + \Delta_1\,(g_a,\beta)\}\,\psi\,d\sigma - \int \beta\,g_a\,\nabla^2\,\psi\,d\sigma + \int \Delta_1\,(g_a,\eta)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma + \int \beta\,\frac{\partial g_a}{\partial\nu}\,\psi\,ds + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \qquad (30_B)$$

$$\int\limits_{Rxy} = -\int h\,\Delta_1\,(\psi,\eta)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,ds - \int h\,\beta\,\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds. \qquad (30_\Gamma)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = & \int \Delta_2 \eta \,\{h\, \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\}\, \psi\, d\sigma \\
& + \int \Delta_1 \left\{\left(h\, \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\right), \eta\right\} \psi\, d\sigma \\
& - \int \{\beta\, \Delta_2 (h\alpha) + \Delta_1 (h\alpha, \beta)\}\, \psi\, d\sigma \;\; {}^{*)} \\
& - \int \beta\, (h\, \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\}\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \\
& - \int \Delta_1 (h\alpha, \eta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \\
& - \int \beta\, \frac{\partial (h\alpha)}{\partial \nu}\, \psi\, ds \\
& + \int \{h\, \Delta_2 \xi + \Delta_1 (h, \xi)\}\, \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\, \psi\, ds \\
& - \int h \beta\, \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds \\
& - \int h\, \Delta_1 (\psi, \eta) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\, ds \\
& + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}.
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{III}_{ab})
$$

IV. Die Struktur der zweiten Derivierten des V-Potentials für den allgemeinsten Fall.

11. **Das Schema für die Form der Derivierten beider Arten Flächenpotentiale,** welches H. Carl Neumann **) aufgestellt hat, lässt sich in den beiden ersten Bestandteilen unserer allgemein geführten Entwickelung, diè sich auf die Differentiation von V-, resp. W-Potentialen beziehen, unmittelbar erkennen. Deuten wir die verschiedenen Verbindungen der Dichtigkeitsfunktion, welche die Formel

*) Hier kommt das Glied: $\int \alpha\, \beta \cdot h \nabla^2\, \psi\, d\sigma$ hinzu.

**) C. Neumann's unter 2. citierte Abh., Satz 15.

kompliziert machen, durch das einzige Symbol $\mathfrak{H}$ an, so können wir die Resultate beider Teile in folgender allgemeinen Form darstellen:

$$\int \mathfrak{H}\, \psi \, d\sigma + \int \mathfrak{H} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma + \int \mathfrak{H}\, \psi \, ds, \tag{31}$$

wo das erste Integral mit der Distanzfunktion ψ für ein V-Potential, das zweite mit der Derivierten dieser Funktion nach der Normale genommen für ein W-Potential und das letzte mit irgend einer Distanzfunktion für ein Randpotential (R) charakteristisch ist.

Für eine geschlossene Fläche verschwindet das dritte Integral (Art. 9 ab).

Wollen wir die Randglieder in das Schema hereinziehen, so erhalten wir für die zweite Derivierte des V-Potentials folgendes, alle Möglichkeiten in sich schliessendes Schema:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} = \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \Phi} = V_{hv} + W_{hv} + R^{\mathrm{I}}_{hv} \\ \dfrac{\partial W}{\partial \Phi} = V_{hw} + W_{hw} + R^{\mathrm{I}}_{hw} + R^{\mathrm{II}}_{hw} + R^{\mathrm{III}}_{hw} \\ \dfrac{\partial R}{\partial \Phi} = \qquad\qquad\qquad\qquad R^{\mathrm{II}}_{hr} + R^{\mathrm{III}}_{hr} \end{cases} \tag{32}$$

$$= V_h + W_h + R_h. \tag{32'}$$

In dem System (32) bedeutet Φ die Differentiation nach irgend einer Koordinate des variablen Punktes $(x\, y\, z)$.

Durch die Indices h soll angedeutet werden, dass die zweiten Derivierten des V-Potentials sich stets in einer Form darstellen lassen, in der die Dichtigkeitsfunktion so beschaffen auftritt, wie das für eine einfache Fläche charakteristisch ist.

Die Indices v, w, r beziehen sich auf die Abstammung aus den dreierlei Arten Potentiale.

Schliesslich sollen die obern Indices an den Randgliedern zeigen, dass das Linienpotential (R) bezüglich der Distanzfunktion so gebildet ist, wie ein V-, W-, resp. R-Potential.

(B.)

Vierter Abschnitt.

V. Bestimmung der allgemeinsten Formel für die zweiten Derivierten des Potentials einer Doppelfläche.

12. **Funktionentheoretische Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Dichtigkeitsfunktion g.** Damit die zweiten Derivierten des Potentials für eine Doppelfläche auch dann noch eindeutig, stetig seien, wenn der variable Punkt in der unmittelbaren Nähe der Fläche sich befindet, wollen wir die folgende Festsetzung treffen:

Die Dichtigkeitsfunktion g oder das Moment soll eine Funktion der Fläche repräsentieren, die so beschaffen ist, dass sie samt ihren ersten und zweiten Ableitungen auf der Fläche eindeutig, stetig ist, und ihre dritten Ableitungen noch endlich und integrabel sind.

13. **Explicite Herstellung der vollständigen Ausdrücke für die zweiten Derivierten eines W-Potentials.** a) Wir knüpfen unsere weiteren Betrachtungen an die Formel (21_B) an. Diese ergab sich nämlich im Laufe der vorangegangenen Entwickelungen für die zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht als die erste Derivierte des Potentials einer Doppelfläche. Wir differenziieren den genannten Ausdruck nach der x-Koordinate des variablen Punktes und schreiben also:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = & \int \{\alpha\, \Delta_2\, g + \Delta_1\,(g, \alpha)\} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, d\sigma \\ & - \int \alpha g \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi\, d\sigma \\ & + \int \Delta_1\,(g, \xi) \cdot \frac{\partial \frac{\partial \psi}{\partial n}}{\partial x}\, d\sigma \\ & + \int \alpha \frac{\partial g}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}\, ds \\ & + \frac{\partial^2 Y}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y\, \partial x},\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

wobei an Stelle der früher mit g_a bezeichneten Dichtigkeitsfunktion g gesetzt wurde, mit den eben festgesetzten Eigenschaften. Wir

bezeichnen in der Differentiation die einzelnen Bestandteile, d. h. die V-, W-, R-Potentiale des vorgelegten Ausdruckes successive mit $\iint\limits_{Vx}$, $\iint\limits_{Wx}$ resp. $\iint\limits_{Rx}$. So erhalten wir für den **ersten Bestandteil** zunächst folgendes:

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_{Vx} = &-\int\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\sigma\\ &+\int\alpha\,g\,\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\,\psi\,d\sigma.\end{aligned}\right\}\qquad(33_a)^{1,2}$$

Das erste Integral $(33_a)^1$ vorstehenden Ausdruckes geht über in:

$$\left.\begin{aligned}&-\int\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\,\Delta_1\,(\psi,\xi)\,d\sigma\\ &-\int\alpha\,\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma.\end{aligned}\right\}\qquad(33_a)^{\mathrm{I,II}}$$

Weiter gestaltet sich das Integral, bezeichnet mit $(33_a)^{\mathrm{I}}$ folgendermassen:

$$\left.\begin{aligned}&\int\Delta_2\,\xi\,\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\,\psi\,d\sigma\\ &+\int\Delta_1\,\Big\{\Big(\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\Big),\,\xi\Big\}\,\psi\,d\sigma\\ &+\int\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,\psi\,ds,\end{aligned}\right\}$$

sodass wir für den ersten Bestandteil des Ausdruckes $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ das Resultat haben:

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_{Vx} = &\int\Delta_2\,\xi\,\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\,\psi\,d\sigma\\ &+\int\Delta_1\,\Big\{\Big(\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\Big),\,\xi\Big\}\,\psi\,d\sigma\\ &+\int\alpha\,g\,\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\,\psi\,d\sigma\\ &-\int\alpha\,\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma\\ &+\int\{\alpha\,\Delta_2\,g + \Delta_1\,(g,\alpha)\}\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\,\psi\,ds.\end{aligned}\right\}\qquad(33_A)$$

Für den **zweiten** Bestandteil ergiebt sich folgende Entwickelung:

$$\iint\limits_{Wx} = -\int \varDelta_1(g, \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \tag{33_b}$$

$$= -\int \varDelta_1(g, \xi) \cdot \left\{\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \, \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \, \partial \zeta}\right\} d\sigma \tag{33_β}$$

$$\left.\begin{aligned} = &+\int \frac{\partial \{\varDelta_1(g, \xi)\}}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \\ &-\int \alpha \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\varDelta_1(g, \xi) \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varDelta_1(g, \xi) \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\varDelta_1(g, \xi) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)\right\} d\sigma \\ &-\int\limits_{(s)} \varDelta_1(g, \xi) \cdot \left\{\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} d\eta - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\zeta\right\} \end{aligned}\right\} (33_\beta)^{1,2,3}$$

Der mittlere Integralausdruck des eben angeschriebenen Aggregates $(33_\beta)^{1,2,3}$ lässt sich folgenderweise ausführen:

$$\left.\begin{aligned} &-\int \alpha \, \varDelta_1(g, \xi) \cdot \nabla^2 \psi \, d\sigma \\ &-\int \alpha \left[\frac{\partial \{\varDelta_1(g, \xi)\}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \{\varDelta_1(g, \xi)\}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \{\varDelta_1(g, \xi)\}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right] d\sigma. \end{aligned}\right\} (33_{\beta\beta})^{1,2}$$

Formen wir noch die Glieder $(33_\beta)^1$ und $(33_{\beta\beta})^2$ in schon behandelter Weise um, so nimmt der Ausdruck für $\iint\limits_{Wx}$ folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \iint\limits_{Wx} = &\int \varDelta_1 \left\{\left(\varDelta_1(g, \xi)\right), \xi\right\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \\ &-\int \alpha \, \varDelta_1 \left\{\left(\varDelta_1(g, \xi)\right), \psi\right\} d\sigma \\ &-\int \alpha \, \varDelta_1(g, \xi) \cdot \nabla^2 \psi \, d\sigma \\ &+\frac{\partial Y_{\varDelta_1}}{\partial z} - \frac{\partial Z_{\varDelta_1}}{\partial y}. \end{aligned}\right\} (33_\beta)^{\mathrm{I..IV}}$$

Dabei ist bezüglich des Integralausdruckes $(33_\beta)^3$ von den unter (28) eingeführten Substitutionen in der Art Gebrauch gemacht. dass an Stelle von g_α jetzt $\varDelta_1(g, \xi)$ gesetzt wurde. *)

Die Green'sche Art Umwandlung des Flächenintegrals, die wir an dem Glied $(33_\beta)^{\mathrm{II}}$ vornehmen wollen, erfordert die Endlichkeit und Integrabilität der dritten Derivierten von g und der Funktion ξ, welche Bedingung der gemachten Voraussetzung nach (Art. 2 u. 12) erfüllt ist.

Mithin geht das System $(33_\beta)^{\mathrm{I}\cdots\mathrm{IV}}$ über in:

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_{Wx} = & \int \varDelta_1\left\{\Big(\varDelta_1(g,\xi)\Big),\xi\right\}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma \\ & +\int\left[\left\{\alpha\,\varDelta_2\Big(\varDelta_1(g,\xi)\Big)+\varDelta_1\left\{\Big(\varDelta_1(g,\xi)\Big),\alpha\right\}\right]\psi\,d\sigma \\ & +\int\alpha\,\frac{\partial\,\{\varDelta_1(g,\xi)\}}{\partial\nu}\,\psi\,ds \\ & -\int\alpha\,\varDelta_1(g,\xi)\cdot\nabla^2\psi\,d\sigma \\ & +\frac{\partial Y_{\varDelta_1}}{\partial z}-\frac{\partial Z_{\varDelta_1}}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad(33_B)$$

Für den **dritten Bestandteil** liefert die Ausführung der Differentiation folgendes:

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_{Rx} = & -\int\alpha\,\varDelta_1(\psi,\xi)\cdot\frac{\partial g}{\partial\nu}\,ds \\ & -\int\alpha^2\,\frac{\partial g}{\partial\nu}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds \\ & +\frac{\partial^2 Y}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}.\end{aligned}\right\}\qquad(33_\Gamma)$$

Ordnen wir jetzt die eben hergestellten Bestandteile $(33_{A,B,\Gamma})$ unserer Entwickelung (B), so ergiebt sich, für die zweite Derivierte des Potentials einer Doppelfläche genommen nach x^2, der vollständige Ausdruck:

---

*) Darauf bezieht sich die als Index an den beiden letzten Ausdrücken angesetzte $\varDelta_1$.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \int \Delta_2 \xi \{\alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (g, \alpha)\} \psi \, d\sigma$$
$$+ \int \Delta_1 \Big\{\Big(\alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (g, \alpha)\Big), \xi\Big\} \psi \, d\sigma$$
$$+ \int \Big[\alpha \Delta_2 \Big(\Delta_1 (g, \xi)\Big) + \Delta_1 \Big\{\Big(\Delta_1 (g, \xi)\Big), \alpha\Big\}\Big] \psi \, d\sigma \quad {}^{*)}$$
$$- \int \alpha \{\alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (g, \alpha)\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma$$
$$+ \int \Delta_1 \Big\{\Big(\Delta_1 (g, \xi)\Big), \xi\Big\} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \qquad \text{(IV}_a\text{)}$$
$$+ \int \alpha \frac{\partial \{\Delta_1 (g, \xi)\}}{\partial \nu} \psi \, ds$$
$$+ \int \{\alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (g, \alpha)\} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \psi \, ds$$
$$- \int \alpha^2 \frac{\partial g}{\partial \nu} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$
$$- \int \alpha \Delta_1 (\psi, \xi) \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} ds$$
$$+ \frac{\partial^2 Y}{\partial z \, \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y \, \partial x} + \frac{\partial Y_{\Delta_1}}{\partial z} - \frac{\partial Z_{\Delta_1}}{\partial y}.$$

Nehmen wir die analogen Abkürzungen vor, wie für den Ausdruck (III_a). Setzen wir also:

$$\alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (\alpha, g) = \mathfrak{G}_\alpha$$
$$\Delta_2 \xi \{\alpha \Delta_2 g + \Delta_1 (\alpha, g)\} = \mathfrak{G}_{\alpha\xi}$$
$$\alpha \Delta_2 \Big\{\Delta_1 (g, \xi)\Big\} + \Delta_1 \Big\{\Big(\Delta_1 (g, \xi)\Big), \alpha\Big\} = \mathfrak{G}_\Xi$$
$$\Delta_1 (g, \xi) = g_1.$$

Somit lautet die Formel für:

---

*) Wie die vorangegangene Entwickelung zeigt, lauten hier die Glieder von der Laplace'schen Operation:

$$- \int \alpha \Delta_1 (g, \xi) \cdot \nabla^2 \psi \, d\sigma + \int \alpha g \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 \psi \, d\sigma.$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \int \{\mathfrak{G}_{\alpha\xi} + \Delta_1(\mathfrak{G}_\alpha, \xi) + \mathfrak{G}_\Xi\}\,\psi\, d\sigma \text{ *)}$$

$$-\int \{\alpha \cdot \mathfrak{G}_\alpha - \Delta_1(g_1, \xi)\}\frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma$$

$$+\int \left\{\mathfrak{G}_\alpha \frac{\partial \xi}{\partial \nu} + \alpha \frac{\partial g_1}{\partial \nu}\right\}\psi\, ds \qquad (\mathrm{IV_a})$$

$$-\int \alpha \left\{\Delta_1(\psi, \xi) + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial n}\right\}\frac{\partial g}{\partial \nu}\, ds$$

$$+\frac{\partial^2 Y}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial Y_{\Delta_1}}{\partial z} - \frac{\partial Z_{\Delta_1}}{\partial y}.$$

b) $$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \int \Delta_2 \eta\,\{\beta\,\Delta_2 g + \Delta_1(g, \beta)\}\,\psi\, d\sigma$$

$$+\int \Delta_1 \left\{\Big(\beta\,\Delta_2 g + \Delta_1(g, \beta)\Big), \eta\right\}\psi\, d\sigma$$

$$+\int \left[\beta\,\Delta_2\Big(\Delta_1(g, \eta)\Big) + \Delta_1\left\{\Big(\Delta_1(g, \eta)\Big), \beta\right\}\right]\psi\, d\sigma \text{ **)}$$

$$-\int \beta\,\{\beta\,\Delta_2 g + \Delta_1(g, \beta)\}\frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma$$

$$+\int \Delta_1 \left\{\Big(\Delta_1(g, \eta)\Big), \eta\right\}\frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \qquad (\mathrm{IV_b})$$

$$+\int \beta \frac{\partial\,\{\Delta_1(g, \eta)\}}{\partial \nu}\,\psi\, ds$$

$$+\int \{\beta\,\Delta_2 g + \Delta_1(g, \beta)\}\frac{\partial \eta}{\partial \nu}\,\psi\, ds$$

$$-\int \beta^2 \frac{\partial g}{\partial \nu}\, ds$$

$$-\int \beta\,\Delta_1(\psi, \eta)\cdot\frac{\partial g}{\partial \nu}\, ds$$

$$+\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 X}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial Z_{\Delta_1}}{\partial x} - \frac{\partial X_{\Delta_1}}{\partial z}.$$

---

*) Vergl. Anm. p. 46.

**) Die Glieder von der Laplace'schen Operation lauten hier:

$$-\int \beta\,\Delta_1(g, \eta)\cdot\nabla^2\psi\, d\sigma + \int \beta\, g\,\frac{\partial}{\partial \eta}\nabla^2\psi\, d\sigma.$$

14. Der gemischte Differentialquotient des Potentials einer Doppelfläche, genommen nach der x- und y-Koordinate des variablen Punktes.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \frac{\partial W}{\partial x}}{\partial y} = &-\int \{\alpha\, \Delta_2\, g + \Delta_1\, (g, \alpha)\} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\, d\sigma \\ &+\int \alpha\, g \frac{\partial}{\partial \eta} \nabla^2 \psi\, d\sigma \\ &-\int \Delta_1\, (g, \xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \\ &-\int \alpha \frac{\partial g}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi\, ds \\ &+\frac{\partial^2 Y}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Führen wir die angedeuteten Differentiationen mit den bis jetzt gebrauchten Kunstgriffen aus, und wenden zur Reduktion der Flächenintegrale die Stokes'schen und Green'schen Theoreme an, so ergiebt sich als definitive Formel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = &\int \Delta_2\, \eta\, \{\alpha\, \Delta_2\, g + \Delta_1\, (g, \alpha)\}\, \psi\, d\sigma \\ &+\int \Delta_1 \Big\{\Big(\alpha\, \Delta_2\, g + \Delta_1\, (g, \alpha)\Big), \eta\Big\}\, \psi\, d\sigma \\ &+\int \Big[\beta\, \Delta_2 \Big(\Delta_1\, (g, \xi)\Big) + \Delta_1 \Big\{\Big(\Delta_1\, (g, \xi)\Big), \beta\Big\}\Big]\, \psi\, d\sigma \quad {}^{*)} \\ &-\int \beta\, \{\alpha\, \Delta_2\, g + \Delta_1\, (g, \alpha)\} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \\ &+\int \Delta_1 \Big\{\Big(\Delta_1\, (g, \xi)\Big), \eta\Big\} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\sigma \qquad + \end{aligned} \qquad (IV_{ab})$$

---

*) Die Glieder von der Laplace'schen Operation lauten hier:

$$-\int \beta\, \Delta_1\, (g, \xi) \cdot \nabla^2 \psi\, d\sigma + \int \alpha\, g \frac{\partial}{\partial \eta} \nabla^2 \psi\, d\sigma.$$

$$+\int \beta \frac{\partial \{\Delta_1(g,\xi)\}}{\partial \nu} \psi\, ds$$

$$+\int \{\alpha\, \Delta_2\, g + \Delta_1(g,\alpha)\} \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \psi\, ds$$

$$-\int \alpha\, \beta \frac{\partial g}{\partial \nu} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \qquad \text{(zu IV}_{ab}\text{)}$$

$$-\int \beta\, \Delta_1(\psi,\xi) \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} ds$$

$$+\frac{\partial^2 Y}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial Z_{\Delta_1}}{\partial x} - \frac{\partial X_{\Delta_1}}{\partial z}.$$

Ganz analog lassen sich die Derivierten $\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial x}$ bilden.

Bevor wir auf die Schlussbetrachtungen des zweiten Hauptteiles dieser Abhandlung eingehen, wollen wir noch zusammenstellen, wie die Dichtigkeitsfunktionen in den Ausdrücken, welche wir der Kürze halber mit X, Y, Z resp. X_{Δ_1}, Y_{Δ_1}, Z_{Δ_1} bezeichnet haben, zu permutieren waren, je nachdem wir die zweiten Ableitungen des V- resp. W-Potentials nach x^2, y^2 oder xy gebildet haben.

In den Substitutionsgleichungen (28) [S. 31] findet sich die Bedeutung der genannten Abkürzungen für die zweite Derivierte des V-Potentials, genommen nach x^2, woraus sich diejenigen in Bezug auf die Koordinaten y^2 und xy ergaben. Die hier auftretenden Faktoren hiessen:

$$g_\alpha = -h\alpha, \qquad g_\beta = -h\beta, \text{ resp. } g_\alpha = -h\alpha,$$

welche für die entsprechenden Derivierten des W-Potentials successive durch:

$$\Delta_1(g,\xi), \qquad \Delta_1(g,\eta), \quad \text{resp.} \quad \Delta_1(g,\xi)$$

zu ersetzen waren, wie dies aus den bezüglichen Entwickelungen hervorgeht.

VI. Die Struktur der zweiten Derivierten des W-Potentials für den allgemeinsten Fall.

15. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$ die für eine Doppelfläche charakteristisch beschaffene Dichtigkeitsfunktion (Moment), so ist die schematische Form für die zweiten Derivierten die folgende:

$$\int \mathfrak{G}\, \psi\, d\sigma + \int \mathfrak{G} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma + \int \mathfrak{G}\, \psi\, ds. \qquad (35)$$

In welcher Weise die einzelnen Glieder entstanden sind, kann durch ein analoges Schema dargestellt werden, wie für die Struktur der Derivierten des V-Potentials (Art. 11) angegeben wurde. Unser allgemein gültiges Schema für die Struktur der zweiten Derivierten eines W-Potentials lautet dann:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^2} = \left[V_{gv} + V_{gw}\right] + \left[W_{gv} + W_{gw}\right] + \left[(R_{gv} + R_{gw})^{\mathrm{I}} + (R_{gw} + R_{gr})^{\mathrm{II}} + (R_{gw} + R_{gr})^{\mathrm{III}}\right]$$
$$= V_g \quad + W_g \quad + R_g .$$

Dabei sind die früheren Bezeichnungen beibehalten.

(AB.)

Fünfter Abschnitt.

VII. Diskontinuitäten der zweiten Derivierten der Flächenpotentiale in dem behandelten Fall.

16. **Festsetzung des Richtungssinnes, in welchem der variable Punkt (xyz) die Fläche durchschreitet.** Es ist für das Potential und für seine Derivierten charakteristisch, wie ihre Werte sich ändern, wenn der Punkt (xyz), für welchen man dieselben bildet, von beliebigen Richtungen her in die Fläche selbst hereinrückt, sodass der Vergleich der Grösse dieser Aenderung zweier Potentiale oder ihrer Derivierten, d. h. ihre Unstetigkeitsformel, uns Aufschluss giebt über die Funktionen, resp. ihre Derivierten selbst.

Aus diesem Grunde sollen die Betrachtungen bezüglich der Diskontinuitäten der zweiten Derivierten der Flächenpotentiale hier ihren Platz finden.

Es ist bekannt, dass für die Unstetigkeit der normalen Ableitung des Potentials (U) die Coulomb-Poisson'sche Gleichung gilt:

$$(U)_e - (U)_i = \pm 4 \pi h, \qquad (36)$$

die uns aussagt, dass die Unstetigkeit der Ableitung des Potentials proportional ist der Dichtigkeit*) in dem betreffenden Durchgangspunkt auf der Fläche.

*) Poisson hat dabei die Frage: wie stark die Variation der Dichtigkeit an dem betrachteten Punkte sein kann, offen gelassen.

Je nachdem man die äussere (e) Seite der Fläche positiv oder negativ annimmt, ist das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen, worüber man nach Belieben verfügen kann.

In unserer allgemeinen Betrachtung, worin die Fläche als nicht geschlossen gedacht ist, kann von einer äusseren oder inneren Seite nicht die Rede sein, sodass wir für die Bestimmung der Unstetigkeit der berechneten Ableitungen folgendes allgemein gültiges Schema aufzustellen haben:

$$(\pm) - (\mp) = \pm 4 \pi h \qquad (36')$$

[$(\pm)$ bedeutet den Wert der Derivierten des Potentials auf der Seite der positiven bezw. negativen Belegung], sodass für $4 \pi h$ das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem man die Fläche von der positiven oder von der negativen Seite her durchschreiten lässt, mag jene oder diese die äussere resp. innere Seite der Fläche sein, wenn sie geschlossen wäre.

Wird die Normale, die auf die eine Seite der Fläche errichtet ist, positiv angenommen, so betrachten wir diese Seite als positiv. Welche Richtung aber für die Normale positiv zu nehmen sei, ist nach unserer Verfügung (Art. 4_a) nur relativ zu den auf der Fläche gezogen gedachten Kurvenfamilien ($v = \text{const}$, $u = \text{const}$) festgesetzt. Nach der beliebigen Anordnung dieser, welche dann aber im Laufe der Untersuchung festzuhalten ist, richtet sich die Normale und damit der Sinn der Seiten der Fläche.

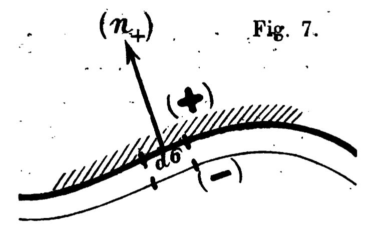


Fig. 7.

Um diese Willkür bezüglich des Richtungssinnes anzudeuten gegenüber der Carl Neumann'schen Annahme, in welcher ausdrücklich die innere Seite der betrachteten geschlossenen Fläche als positiv festgesetzt ist, wollen wir für die Richtung der Unstetigkeit unserer Grössen das Schema (36′) mit den oberen Vorzeichen zu Grunde legen, indem bei den Herren C. Neumann und Korn die untern Zeichen gelten. In ihrer Darstellung zeigt sich dadurch bei der Vergleichung der Unstetigkeitsformel mit denen, die wir aufstellen, ein Vorzeichen-Unterschied.

Nun kann aber das bei den Unstetigkeiten auftretende Vorzeichen noch von den Verfügungen über den Richtungssinn der Hauptkrümmungsradien bedingt sein.

Wir wollen festsetzen, dass die Hauptkrümmungsradien positiv zu nehmen sind, wenn ihre Richtung von*) dem Krümmungscentrum aus nach der Fläche hin mit der positiven Richtung der Normale übereinstimmt; negativ dagegen, wenn sie ebenfalls von dem Krümmungscentrum ausgehend entgegengesetzt gerichtet sind, wie die positive Normale.

Nachstehende Figur soll diese Beziehungen zwischen Normale und Krümmungsradien versinnlichen.

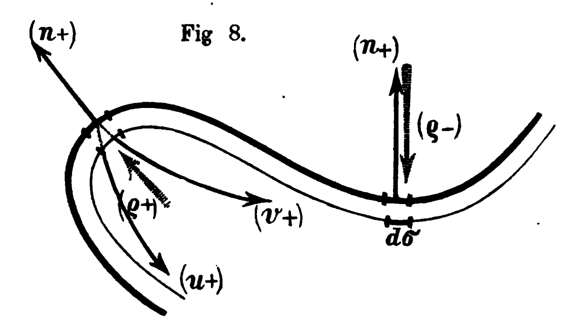


Fig 8.

17. **Bestimmung der Unstetigkeitsformeln für die zweiten Derivierten der *V*- und *W*-Potentiale bezüglich der Koordinatenrichtungen und der Normale.** Wir haben nur das Verhalten derjenigen Glieder zu beachten, welche den Charakter eines *W*-Potentials zeigen, da es von einem *V*-Potential bekannt ist, dass es überall stetig bleibt; ebensowenig erfahren die Randpotentiale in ihrem Betrag eine Aenderung, da sie auf die Begrenzung jener Fläche sich beziehen, in die der variable Punkt hineinrückt.

a) Wir bekommen folgende Werte für die Sprünge, wenn wir den variablen Punkt längs der einzelnen Koordinatenrichtungen die Fläche durchschreiten lassen. **)

---

*) Gewöhnlich werden die Krümmungsradien, wie es bei Herrn C. Neumann geschehen ist, von dem Oberflächenelement nach dem Krümmungscentrum hin, also in entgegengesetzter Richtung positiv gerechnet. Infolge dessen löst sich der oben erwähnte Vorzeichen-Unterschied für die Unstetigkeitsformel betreffend derjenigen Werte, welche durch die Hauptkrümmungsradien dargestellt sind.

**) Herr Korn (vergl. cit. Buch Anm. 11, 12 zu den Sätzen V_c, VI_d) betrachtet die Grössen, welche mit unserer Dichtigkeitsfunktion korrespondieren, für die Aufstellung der Unstetigkeitsformel lediglich als Funktionen der Stelle, die also von der Flächennormale unabhängig sind, wodurch sich jene Formeln vereinfachen. Diese Vereinfachung trat in unserer Entwickelung von selber ein, indem die Grössen, bezüglich welcher Herr Korn die Einschränkung macht, sich weghoben; wir haben ihnen zwar eine Bedeutung zugeschrieben und damit eine

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\alpha\{h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\} + \varDelta_1(h\alpha,\xi)\right] \qquad (\mathrm{III_A})\ ^{*)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\beta\{h\,\varDelta_2\,\eta + \varDelta_1(h,\eta)\} + \varDelta_1(h\beta,\eta)\right] \qquad (\mathrm{III_B})\ ^{*)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\gamma\{h\,\varDelta_2\,\zeta + \varDelta_1(h,\zeta)\} + \varDelta_1(h\gamma,\zeta)\right] \qquad (\mathrm{III_C})\ ^{*)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\beta\{h\,\varDelta_2\,\xi + \varDelta_1(h,\xi)\} + \varDelta_1(h\alpha,\eta)\right] \qquad (\mathrm{III_{AB}})\ ^{**)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\alpha\left\{\alpha\,\varDelta_2\,g + \varDelta_1(g,\alpha)\right\} - \varDelta_1\left\{\left(\varDelta_1(g,\xi)\right),\xi\right\}\right] \qquad (\mathrm{IV_A})\ \dagger)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\beta\left\{\beta\,\varDelta_2\,g + \varDelta_1(g,\beta)\right\} - \varDelta_1\left\{\left(\varDelta_1(g,\eta)\right),\eta\right\}\right] \qquad (\mathrm{IV_B})\ \dagger)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\gamma\,\mathfrak{G}_\gamma - \varDelta_1(g_3,\zeta)\right] \qquad (\mathrm{IV_{\mathfrak{C}}})\ \dagger)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_{(-)} = -4\pi\left[\beta\left\{\alpha\,\varDelta_2\,g + \varDelta_1(g,\alpha)\right\} - \varDelta_1\left\{\left(\varDelta_1(g,\xi)\right),\eta\right\}\right] \qquad (\mathrm{IV_{AB}})\ \dagger\dagger)$$

Beschaffenheit unserer Dichtigkeitsfunktionen von gleicher Art gegeben, wie sie die Korn'sche Funktion ‚der Stelle' besitzt.

Trotz der gemachten Einschränkung müssen diese Funktionen in der Korn-schen Darstellung, infolge der zu Grunde gelegten Flächengleichungen nach drei Koordinatenrichtungen, also sozusagen über die Fläche hinaus deriviert werden.

Im Sinn der Gaussischen Flächengleichungen dagegen, von denen wir ausgegangen sind, erscheinen von unseren Dichtigkeitsfunktionen Derivierte nur nach ganz in der Fläche liegenden Richtungen genommen; nämlich bezüglich der V- und W-Potentiale (in den Schlussformeln: $\mathrm{III_{a,b,c;ab}}$, $\mathrm{IV_{a,b;ab}}$, $\mathrm{III_A}$... und $\mathrm{IV_A}$...) nur nach den Parametern u, v genommen.

*) Wenn wir die vollkommene Allgemeinheit unserer Darstellung auch hier bewahren wollen, so haben wir noch die Unstetigkeitswerte derjenigen Glieder hinzuzufügen, an denen die Laplace'sche Operation angedeutet ist, welche also Derivierte des V-Potentials sind, die nicht verschwinden, vielmehr je einen Sprung von folgender Art erleiden:

$$+4\pi h\alpha^2 \quad \text{resp.} \quad 4\pi h\beta^2, \qquad 4\pi h\gamma^2.$$

**) Die Unstetigkeit für das Glied, welches andeutet, dass die Formel unabhängig ist von dem Attraktionsgesetz, heisst hier:

$$+4\pi h\cdot\alpha\beta.$$

†) Die hinzukommenden Unstetigkeitswerte:

$$-4\pi\alpha\{\varDelta_1(g,\xi)-g\}; \quad -4\pi\beta\{\varDelta_1(g,\eta)-g\}; \quad -4\pi\gamma\{\varDelta_1(g,\zeta)-g\}.$$

††) Der hinzukommende Unstetigkeitswert:

$$-4\pi[\beta\{\varDelta_1(g,\xi)\}-\alpha g].$$

b) Die Werte für die Unstetigkeiten vereinfachen sich besonders, wenn man sie auf die Normale bezieht. Lassen wir die Koordinatenachsen successive mit der Normale zusammenfallen, dadurch werden die entsprechenden Richtungscosinuse gleich der Einheit und die übrigen zwei jede gleich Null.

Aus $\alpha = 1$ folgt nach (8), dass:

$$\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} = H, \tag{8$_a$)'}$$

wo H nach der Definitionsgleichung (7) positiv ist. Zugleich müssen aber infolge der eben gemachten Voraussetzung folgende Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0 \tag{8$_b$)'}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} = 0. \tag{8$_c$)'}$$

Hiernach müssen die Derivierten $\frac{\partial \xi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \xi}{\partial v}$ Null sein.

Dann verschwinden aber die Differentialparameter, welche diese Ableitungen enthalten. Somit reduziert sich (III$_A$) auf:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{(n+)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{(n-)} = -4\pi h \cdot \varDelta_2 \xi \tag{III$_A$)'}$$

und allgemein:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right)_{(-)} = 4\pi h \left\{\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right\} \tag{III) *)}$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien bedeuten. Es ist nämlich nach der Beltrami'schen Relation [7]) zwischen dem Differentialparameter und einer wichtigen Verbindung der Hauptkrümmungsradien: $\varDelta_2 \xi = -\alpha\left\{\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right\}$, wo das Vorzeichen unseren Festsetzungen über den Sinn der Krümmungsradien entspricht.

Lässt man den variablen Punkt $(x\,y\,z)$ in der Richtung der Normale die Fläche durchschreiten, so bekommt man aus (IV$_A$),

---

*) Diese Formel (III) und die unter (IV) folgende sind bei H. Beltrami aus den expliciten Ausdrücken der ersten Derivierten der Potentiale einer einfachen resp. Doppelfläche aufgestellt worden [vergl. ibid. Formel (7)].

wenn die x-Achse mit der Normale zusammenfällt, die Bedingungen:

$$\alpha = 1, \text{ daher } \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0 \text{ und } \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0; \text{ also } \Delta_1(g, \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0 \quad " \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0; \quad " \begin{cases} \Delta_1(g, \xi) = 0 \\ \Delta_1\{(\ ), \xi\} = 0. \end{cases}$$

Damit wird:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\right)_{(+)} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\right)_{(-)} = -4\pi \Delta_2 g. \tag{IV}$$

Sechster Abschnitt.

VIII. Nachweis dafür, dass die entwickelten Formeln für die gemischten Ableitungen der Flächenpotentiale dem ‚Fundamentalsatz der partiellen Derivierten' genügen.

18. **Vergleich der Unstetigkeitswerte der in x und y gemischten Derivierten des V-Potentials.** Es ist wegen des unsymmetrischen Auftretens der Grössen nicht möglich, unmittelbar zu erkennen, dass die Unstetigkeitswerte der gemischten Derivierten bei vertauschter Differentiationsordnung sich selbst äquivalent bleiben. Wir wollen ihre Identität zum Vorschein bringen.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die betreffenden Ausdrücke zunächst in der ausführlichen Form, wie folgt:

$$-4\pi[\beta h \Delta_2 \xi + \beta \Delta_1(h, \xi) + h \Delta_1(\alpha, \eta) + \alpha \Delta_1(h, \eta)], \tag{III$_{AB}$}$$

$$-4\pi[\alpha h \Delta_2 \eta + \alpha \Delta_1(h, \eta) + h \Delta_1(\beta, \xi) + \beta \Delta_1(h, \xi)]. \tag{III$_{BA}$}$$

Dann ist die Uebereinstimmung zwischen den Gliedern der beiden Zeilen für den folgenden Ausdruck nicht ohne weiteres ersichtlich:

$$\beta \Delta_2 \xi + \Delta_1(\alpha, \eta) \mathbin{/\!/} \alpha \Delta_2 \eta + \Delta_1(\beta, \xi). \text{*)} \tag{37}$$

*) Um darauf aufmerksam zu machen, dass die Identität der beiden Seiten erst gezeigt werden soll, wurde das Gleichheitszeichen schief angesetzt.

Wir wollen durch Auflösung der symbolischen Ausdrücke das Bestehen der Identität auch für diese Glieder nachweisen. Das dadurch angezeigte Verfahren wird sich etwas vereinfachen, wenn wir die Betrachtung für den eingeschränkten Fall, dass $E = G$, $F = 0$ ist, vollziehen. Das heisst geometrisch: wir nehmen anstatt der allgemeinen krummlinigen Koordinaten (u, v) ein isometrisches System auf der bisher betrachteten Fläche an, ohne die Beschaffenheit dieser zu ändern. Es erfahren dann die Koefficienten des Bogenelementes gleich grosse Aenderungen: $ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2)$ *) und die Kurven $v =$ const, $u =$ const stehen wegen $F = 0$ (Gl. 5) auf einander senkrecht. Zufolge der gemachten Annahme bestehen also die Gleichungen:

$$H = E = G \tag{7)^{I}$$

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial u}; \quad \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial v} \tag{2)^{I}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0. \tag{3)^{I}$$

Dann reduzieren sich die Ausdrücke (3′) auf:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = -\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v} \tag{3')^{I}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = -\sum \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u} \tag{3')^{II}$$

worauf wir dann zu achten haben.

Somit lauten die Glieder der linken Seite (a) der Gleichung (37), indem wir die Werte der symbolischen Ausdrücke [(19_a), (17_a)] einführen und für β aus Gleichung (8) den Wert nehmen:

$$\beta \Delta_2 \xi = \frac{1}{E^2}\left\{\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right\} \tag{37_1)^{a}$$

$$\Delta_1(\alpha, \eta) = \frac{1}{E}\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\right\}. \tag{37_2)^{a}$$

Für die rechte Seite (b) geben die analogen Operationen folgendes:

$$\alpha \Delta_2 \eta = \frac{1}{E^2}\left\{\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right\} \tag{37_1)^{b}$$

$$\Delta_1(\beta, \xi) = \frac{1}{E}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right\}. \tag{37_2)^{b}$$

---

*) Vergl. Darboux: Théorie des surfaces [tome I, p. 152].

Wir nehmen für die Richtungskosinuse α und β ihre Werte aus der Gleichungsgruppe (8), wo sie durch die Koordinaten η, ζ resp. ζ, ξ ausgedrückt sind, bilden darauf ihre Derivierten nach u und v und setzen diese in die Gleichungen $(37_2)^a$ und $(37_{\bar{2}})^b$ ein. Dann ordnen wir diejenigen Glieder, deren Identität sich durch diese Operation noch nicht herausgestellt hat, in eine Gleichung, indem wir die gleichkonstruierten Ausdrücke je auf eine Seite schaffen und die Derivierten $\frac{\partial E}{\partial u}$, $\frac{\partial E}{\partial v}$ mit Rücksicht auf die Bedingungen der gemachten Annahme einführen [Gl. $(3')^{I}$, $(3')^{II}$], so ergiebt sich folgendes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{E^3}\left\{ E\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \left[\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right]\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right\}\\
&+\frac{1}{E^2}\left\{\left\|\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right]\right\| - \left\|\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right]\right\|\right.\\
&\quad + \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right] - \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right]\\
&\quad + \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \left\|\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v \partial u}\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2\right]\right\| - \left\|\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2\right]\right\|\\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right] - \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right]\right\}
\end{aligned}\right\}(37)^{A} \;/\!/$$

$$/\!/\; \left.\begin{aligned}
&\frac{1}{E^3}\left\{ E\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \left[\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right]\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right\}\\
&+\frac{1}{E^2}\left\{\left\|\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right]\right\| - \left\|\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right]\right\|\right.\\
&\quad + \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\\
&\quad + \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \left\|\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v \partial u}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2\right]\right\| + \left\|\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)^2\right]\right\|\\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \left\|\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v \partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2\right]\right\| + \left\|\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2\right]\right\|\right\}
\end{aligned}\right\}(37)^{B}$$

Die Glieder, die in den einfachen eckigen Klammern gesetzt sind, heben sich innerhalb der Gruppe $(37)^{A}$ auf, resp. fallen wegen $F = 0$ beiderseits weg. Die doppelten Klammern zeichnen die-

jenigen Glieder aus, von denen die gleichkonstruierten, je auf eine Seite gebracht, zu dem gemeinschaftlichen Teil den Faktor E geben. Dann ergiebt sich ohne weiteres folgende Identität:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E^2}\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + E\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v\,\partial u}\right\} = \\ &= \frac{1}{E^2}\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + E\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\,\partial v}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (37)^{\mathrm{III}}$$

Damit ist gezeigt, dass die durch die Gleichung (37) verbundenen symbolischen Ausdrücke in dem betrachteten Fall in der That einander gleich sind, und also leisten unsere Formeln dem Satze:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$$

Genüge, wie es sein muss.

19. **Vergleich der Unstetigkeitswerte der in x und y gemischten Derivierten des W-Potentials.** Wir wollen bezüglich einer Doppelfläche ebenfalls zeigen, dass der Wert des Ausdruckes (IV_{AB}), den wir für $\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}$ gewonnen haben, sich bei der Vertauschung der Aufeinanderfolge der Differentiation nicht verändert, dass also die Ausdrücke:

$$-4\pi\left[\beta\,\alpha\,\Delta_2\,g + \beta\,\Delta_1\,(g, \alpha) - \Delta_1\left\{\Big(\Delta_1\,(g, \xi)\Big), \eta\right\}\right], \qquad (IV_{AB})$$

$$-4\pi\left[\alpha\,\beta\,\Delta_2\,g + \alpha\,\Delta_1\,(g, \beta) - \Delta_1\left\{\Big(\Delta_1\,(g, \eta)\Big), \xi\right\}\right] \qquad (IV_{BA})$$

einander äquivalent sind, was aber für die folgenden Glieder nicht ohne weiteres erkennbar ist:

$$\Delta_1\left\{\Big(\Delta_1(g, \xi)\Big), \eta\right\} - \beta\,\Delta_1\,(g, \alpha) \mathbin{/\!\!/} \Delta_1\left\{\Big(\Delta_1(g, \eta)\Big), \xi\right\} - \alpha\,\Delta_1\,(g, \beta). \quad (38)$$

Indem wir von den Gleichungen ($15_{1,2}$) Gebrauch machen, können wir vorstehenden Ausdruck in die folgende Form umsetzen:

$$\frac{\partial \eta}{\partial n}\Delta_1\left(g, \frac{\partial \xi}{\partial n}\right) + \frac{\partial g}{\partial n}\Delta_1\left(\frac{\partial \xi}{\partial n}, \eta\right) \mathbin{/\!\!/} \frac{\partial \xi}{\partial n}\Delta_1\left(g, \frac{\partial \eta}{\partial n}\right) + \frac{\partial g}{\partial n}\Delta_1\left(\frac{\partial \eta}{\partial n}, \xi\right). \quad (38)^{\mathrm{I}}$$

Dadurch stellen sich die aufzulösenden Symbole wohl einfacher dar, allein für die Symmetrie ist nicht viel gewonnen.

Wir schlagen nun den analogen Weg ein, den wir vorhin bei den gemischten Derivierten des V-Potentials befolgt haben und wollen unter Aufrechterhaltung der dort gemachten Annahmen (Art. 18) die symbolischen Ausdrücke ganz auflösen. Wir führen die angedeuteten Operationen zunächst an der **linken Seite** (a) aus. So ergeben sich die im Folgenden unter $(38_I)^a$ und $(38_{II})^a$ dargestellten Ausdrücke:

$$\Delta_1 \left\{ \left(\Delta_1 (g, \xi) \right), \eta \right\}_{\text{für } F=0,\ H=E=G} =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial u}\left\{\Delta_1(g,\xi)\right\}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\Delta_1(g,\xi)\right\}\frac{\partial \eta}{\partial v}}{E} \qquad (38_1)^a$$

$$\left.\begin{aligned} = \frac{1}{E^3}\Big\{ & E\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u} + E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u} \\ & + E\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} + E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} \\ & + E\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} + E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} \\ & + E\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v} + E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (38_1)^a$$

In dem zweiten Gliede der linken Seite des Ausdruckes (38) führen wir, wie vorhin, für die Richtungscosinuse α, β ihre Werte, ausgedrückt durch die Koordinaten η, ζ resp. ζ, ξ ein. Wir machen also von folgenden Derivierten Gebrauch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{1}{E^2}\Big\{ & E\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\frac{\partial \zeta}{\partial v} + E\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v \partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} \\ & - E\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial v} - E\frac{\partial^2 \eta}{\partial v \partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{E^2}\Big\{ & E\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial u} + E\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} \\ & - E\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\frac{\partial \zeta}{\partial u} - E\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\Big\}. \end{aligned}$$

Demnach zerfällt der in Rede stehende Ausdruck:

$$-\beta\,\Delta_1(g,\alpha) = -\beta\,\frac{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \alpha}{\partial v}}{E} \qquad (38_2)^a$$

in die zweckmässig geordneten Glieder folgenden Aggregates:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{E^3}\Big\{\underline{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}}+\underline{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\\
&\quad+\underline{\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}}+\underline{\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\\
&\quad+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}\frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\\
&\quad+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2}\frac{\partial\xi}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\eta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\\
&\quad-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\eta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\Big\}\\
&-\frac{1}{E^4}\Big\{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\Big\}.
\end{aligned}\right\}(38_{II})^a
$$

Die entsprechenden Glieder $(38_I)^b$ und $(38_{II})^b$ der **rechten Seite** (b) des vorgelegten Ausdruckes lauten folgendermassen:

$$
\Delta_1\Big\{\big(\Delta_1(g,\eta)\big),\xi\Big\}=
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=\frac{1}{E^3}\Big\{\underline{E\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}}+E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}\frac{\partial\xi}{\partial u}-\underline{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}}\\
&\quad+\underline{E\frac{\partial^2 g}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}}+E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\eta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\\
&\quad+\underline{E\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}}+E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\\
&\quad+\underline{E\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}}+E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2}\frac{\partial\xi}{\partial v}-\underline{\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}}\Big\}.
\end{aligned}\right\}\quad(38_I)^b
$$

$$-\alpha\,\Delta_1(g,\beta)=$$

$$\left.\begin{aligned}
&=\frac{1}{E^3}\Big\{\underline{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}}+\underline{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\\
&\quad+\underline{\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}}+\underline{\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\frac{\partial\eta}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}\frac{\partial\eta}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\\
&\quad-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\Big\}\\
&-\frac{1}{E^4}\Big\{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\Big\}.
\end{aligned}\right\}\;(38_{\text{II}})^{\text{b}}$$

Die letzten Gruppen in den Aggregaten $(38_{\text{II}})^{\text{a}}$ und $(38_{\text{II}})^{\text{b}}$ stimmen, wie vorauszusehen war, Glied für Glied überein. Die vorliegende Entwickelung brachte ausserdem noch die Identität der unterstrichenen Glieder zum Vorschein. Der Faktor $\frac{1}{E^3}$ erscheint in allen Gliedern, somit können wir von ihm im weiteren Verlaufe des Identitätsnachweises absehen.

Es ist nunmehr leicht zu erkennen, dass die äquivalenten Ausdrücke zu denen, welche die Funktion E enthalten, durch diejenigen Glieder geliefert werden, in welchen eines der Quadrate $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2$ erscheint. Die dadurch angedeutete Umformung vermehrt zwar die Anzahl der Glieder, teilweise werden aber die neu

hinzugefügten mit den schon vorhandenen zu einem Ausdruck von der Form: $F = 0$ sich vereinigen, oder aber sich gegen die Zahlenfaktoren 2 wegheben.

Diese Faktoren treten, wie aus der folgenden Darstellung hervorgeht, in den expliciten Werten auf, die als äquivalente für die Derivierten $\frac{\partial E}{\partial u}$, $\frac{\partial E}{\partial v}$ gesetzt wurden. Wir wollen andererseits an Stelle der einzeln erscheinenden additiven Glieder $\left(\text{wie } \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\, \partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial v}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v\, \partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \cdot\right)$ jener expliciten Werte die vollständigen Ausdrücke der Derivierten $\frac{\partial E}{\partial u}$ (für $E = G$), und $\frac{\partial E}{\partial v}$ einführen. Sodann ergeben sich für die beiden Seiten des vorgelegten Ausdruckes (38) folgende Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}
-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big]\Big\| + \Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial u}\;\frac{\partial \eta}{\partial u}\Big)\Big] \\
-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big]\Big\| + \Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v\,\partial u}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial v}\;\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big)\Big] \\
\qquad\qquad\qquad - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\;\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\| - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\;\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\| \\
\qquad\qquad\qquad - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\;\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\| - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\;\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\| \\
+ E\frac{\partial g}{\partial u}\;\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\;\frac{\partial \eta}{\partial u} - \Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\;\frac{\partial \eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\;\frac{\partial \zeta}{\partial u}\Big] - \Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \eta}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\;\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big] \\
\\
+ E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \Big\|\Big[2\Big]\Big\|\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\;\frac{\partial \eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\;\frac{\partial \xi}{\partial u} + \Big\|\Big[2\Big]\Big\|\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \eta}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\;\frac{\partial \xi}{\partial v} \\
+ E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \Big[2\Big]\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial u}\Big)\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial u}\Big) + \Big[2\Big]\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big)\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big) \\
+ E\frac{\partial g}{\partial v}\;\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\;\frac{\partial \eta}{\partial v} + \Big[2\Big]\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\;\frac{\partial \eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\;\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \Big[2\Big]\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \eta}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\;\frac{\partial \zeta}{\partial v} \\
\\
+ E\frac{\partial g}{\partial u}\;\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\;\frac{\partial \xi}{\partial u} - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\;\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big]\Big\| - \Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial v}\;\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big)\Big] \\
+ E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big]\Big\| - \Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial v}\;\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big)\Big] \\
+ E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big]\Big\| - \Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v\,\partial u}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial u}\;\frac{\partial \eta}{\partial u}\Big)\Big] \\
+ E\frac{\partial g}{\partial v}\;\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\;\frac{\partial \xi}{\partial v} - \Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\;\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big]\Big\| - \Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\;\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\Big(\frac{\partial \eta}{\partial u}\;\frac{\partial \eta}{\partial u}\Big)\Big]
\end{array}\right\}(38)^{*}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big]\Big\|+\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\Big)\Big]\\
-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big]\Big\|+\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big)\Big]\\
\qquad\qquad\qquad-\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\|+\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\|\\
\qquad\qquad\qquad-\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\|+\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\Big\|\\
+E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\frac{\partial \xi}{\partial u}-\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\Big]+\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\Big]\\
\\
+E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+[2]\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial u}\Big)\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial u}\Big)+[2]\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big)\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big)\\
+E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\|[2]\|\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\|[2]\|\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial v}\\
+E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}\frac{\partial \xi}{\partial v}+[2]\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\frac{\partial \zeta}{\partial u}+[2]\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\\
\\
+E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial \eta}{\partial u}-\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big]\Big\|-\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big)\Big]\\
+E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}-\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big]\Big\|-\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\Big)\Big]\\
+E\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}-\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big]\Big\|-\Big[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v\,\partial u}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\Big)\Big]\\
+E\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\frac{\partial \eta}{\partial v}-\Big\|\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\Big]\Big\|-\Big[\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\Big)\Big]
\end{array}\right\}(38)^{B}
$$

Je zwei der Glieder, die in den einfachen eckigen Klammern gesetzt sind, heben sich innerhalb der Gruppe $(38)^{A}$ resp. $(38)^{B}$ gegenseitig auf. Die doppelten Klammern zeichnen diejenigen Glieder aus, von denen die gleichkonstruierten, je auf eine Seite gebracht, $F = 0$ geben. Setzen wir noch die Ausdrücke, deren Zahlenfaktoren weggefallen sind, wieder in ihre ursprüngliche Gestalt um und schreiben zugleich von den freistehenden Gliedern diejenigen mit, deren Identität noch nicht dargethan ist, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\\ &-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}=\\ =&-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\\ &-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} \end{aligned}\right\} \quad (38)^{**}$$

Damit ist in dem betrachteten Fall die vollständige Identität unserer Formeln für:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}$$

nachgewiesen.

Siebenter Abschnitt.

IX. Reduktion des allgemeinen Falles.

20. Wir unterwerfen zum Schluss unsere Formeln, die wir in allgemeinster Weise hergestellt haben, den Beschränkungen, mit welchen sich Herr C. Neumann bedient hat, und wollen hierdurch zeigen, dass der Fall, für den er eine teilweise Bestimmung der zweiten Derivierten des Potentials einer einfachen Schicht geliefert hat, ein Spezial-Fall des unsrigen ist.

Wir müssen zugleich die Differentialparameter - Ausdrücke unserer Formeln für diejenigen Glieder entwickeln, auf welche der Vergleich erstreckt werden kann, d. h. wir führen die betreffenden Ausdrücke in die Gaussischen Grössen über, damit sie auf die Gestalt der Carl Neumann'schen Formeln gebracht seien, insofern diese vorhanden sind.

Nebenbei leistet uns dann dieser Vergleich eine teilweise Kontrolle für die Richtigkeit der betreffenden Glieder unserer allgemeinen Entwickelung.

Allerdings könnten wir durch den Vergleich unserer Resultate mit den Korn'schen Formeln eine bessere Kontrolle finden bezüg-

lich derjenigen Glieder, die dort ebenfalls für den allgemeinen Fall berechnet sind. Wir müssten nur für die bei Herrn Korn und in der vorliegenden Arbeit angewandten allgemeinen Methoden einen Spezial-Fall treffen, in dem sich die zu Grunde gelegten zwei verschiedenen Flächendarstellungen einander decken. Dieser Fall würde für uns offenbar in der Flächengleichung:

$$\zeta = f(\xi, \eta)$$

(wobei $\xi = u$, $\eta = v$ ist) und für die Korn'sche Darstellung in

$$\zeta - f(\xi, \eta) = 0$$

(welche die nach ζ aufgelöste Form der Gleichung: $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ ist) eintreten.

Allein dieser Vergleich würde eben nur eine Kontrolle für die Rechnung liefern; daher ist für uns von grösserem Interesse, den erstgenannten Vergleich vorzunehmen.

Wir finden bei Herrn C. Neumann *) folgendes Glied als ein Bestandteil der zweiten Derivierten des V-Potentials angegeben:

$$\int \frac{\partial T}{\partial \nu} \left\{ -2A\left(\frac{q_1 \alpha_1}{\sqrt{E}} + \frac{q_2 \alpha_2}{\sqrt{E}}\right) + q\left(\frac{\alpha_1^2}{R} + \frac{\alpha_2^2}{S} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right) A^2\right)\right\} d\sigma \quad (39)$$

wobei α_1 für $\dfrac{\frac{\partial \xi}{\partial u}}{\sqrt{E}}$; α_2 für $\dfrac{\frac{\partial \xi}{\partial v}}{\sqrt{G}}$ gesetzt ist.

In unserer Schreibweise, etwas ausgeführt, lautet der Ausdruck (39) folgendermassen:

$$\int \Big[-2\alpha \underbrace{\left\{ \frac{G \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} + E \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v}}{EG} \right\}}_{(a)} +$$

$$+ h \Big\{ \underbrace{\frac{1}{E} \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2}{\varrho_1} + \frac{1}{G} \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2}{\varrho_2}}_{(b)} - \underbrace{\alpha^2 \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)}_{(c)} \Big\} \Big] \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma. \quad (39')$$

Der korrespondierende Ausdruck in unserer Entwickelung heisst (aus III_a):

$$-\int [\underbrace{\alpha \{h \Delta_2 \xi}_{(1)} + \underbrace{\Delta_1 (h, \xi)\}}_{(2)} + \underbrace{\Delta_1 (h\alpha, \xi)}_{(3)}] \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma. \quad (40)$$

---

*) Vergl. cit. Abh., Satz V_γ, Formel (17) (B).

Diese Formel soll für den Fall reduziert werden, dass die krummlinigen Koordinaten u, v speziell die Krümmungskurven der Fläche sind. Diese Kurven sind bei beliebiger Wahl des Koordinatensystems durch die Differentialgleichung: *)

$$(FD - ED')\,du^2 + (GD - ED'')\,du\,dv + (GD' - FD'')\,dv^2 = 0 \quad (41)$$

charakterisiert. Wenn dieser Gleichung durch die Kurven $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ genügt werden soll, müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} FD - ED' &= 0 \\ GD' - FD'' &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad (42)$$

Multipliziert man die obere Gleichung mit G, die untere mit E, welche Grössen nicht zugleich Null sein können, dann ergiebt sich die Bedingung:

$$F\{GD - ED''\} = 0 \quad (42_a)$$

und daraus dann, dass $F = 0$ ist. Denn wäre die Verbindung $GD - ED''$ Null, so würde wegen (42) die vorgelegte Differentialgleichung (41) identisch erfüllt sein und es würden alle Kurven auf der Fläche Krümmungskurven sein, d. heisst die Fläche wäre eine sphärische.

Aus:
$$GD - ED'' \neq 0$$
folgt dann, dass für die Krümmungskurven mit $F = 0$ wegen (42) auch $D' = 0$ sein muss.

Wir müssen also unsern Ausdruck (40) unter der Voraussetzung:
$$F = 0$$
und also:
$$H^2 = EG,$$
in die Gaussischen Grössen überführen. Wir bekommen zunächst aus dem dritten Glied (3) der Formel (40):

$$-\Delta_1(h\alpha, \xi) = -h\,\Delta_1(\alpha, \xi) - \alpha\,\Delta_1(h, \xi) \quad \text{(nach 23'')}$$

$$\left.\begin{aligned} &= -h\left\{\frac{G\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\xi}{\partial u} + E\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\xi}{\partial v}}{EG}\right\} \\ &\quad -\alpha\left\{\frac{G\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial\xi}{\partial u} + E\dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial\xi}{\partial v}}{EG}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

---

*) Vergl. Darboux ibid. III. Partie, p. 249 (31).

Dann liefert das zweite Glied (2):

$$-\alpha\,\Delta_1(h,\xi) = -\alpha\left\{\frac{G\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+E\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}}{EG}\right\}. \qquad (2)$$

Schliesslich haben wir für das erste die bekannte Relation:

$$\Delta_2\,\xi = -\alpha\left\{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right\},$$

welche den Vergleich mit dem entsprechenden Glied in der Carl Neumann'schen Formel (39)′ ermöglicht.

Und also lautet das erste Glied unseres Ausdruckes (40):

$$-\alpha\,h\,\Delta_2\,\xi = \alpha^2\cdot h\left\{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right\},$$

sodass (40) übergeht in:

$$\int\Big[\underset{(\alpha)}{-2\,\alpha\left\{\frac{G\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+E\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}}{EG}\right\}}-$$

$$\underset{(\beta)}{-h\left\{\frac{G\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}+E\frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}}{EG}\right\}}+\underset{(\gamma)}{h\,\alpha^2\left\{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right\}}\Big]\frac{\partial \psi}{\partial n}\,d\sigma. \qquad (40')$$

Die Identität für die Glieder (α) und (a), ferner für (γ) und (c) in der unsrigen Formel (40′) und der Carl Neumann'schen Formel (39′) zeigt sich jetzt unmittelbar. Der Vorzeichen-Unterschied bei dem Glied, das durch die Hauptkrümmungsradien dargestellt ist, erklärt sich durch die verschiedenen Festsetzungen über den Sinn der Krümmungsradien in den beiden Darstellungen (vgl. Anm. *) p. 52).

Es bleibt uns nur noch übrig, die Uebereinstimmung für die Glieder (β) in (40′) und (b) in (39′) darzulegen. Zu diesem Ende wollen wir den zunächst in die Form (b) gesetzten Carl Neumann-schen Ausdruck weiter umformen.

Wir ersehen, dass wir betreffend der Umformung des Gliedes:

$$(\mathrm{b}) = h\left\{\frac{1}{E}\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2}{\varrho_1}+\frac{1}{G}\frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2}{\varrho_2}\right\}$$

von den Relationen zwischen den Hauptkrümmungsradien und den Gaussischen Grössen, nämlich von:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} &= \frac{\frac{D}{H}}{E} \\ \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{\frac{D''}{H}}{G} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Gebrauch zu machen haben. Diese Gleichungen (43) entstehen aus der speziellern Form:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} + \varrho_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0 \quad \text{und entsprechend:} \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} + \varrho_2 \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot$$

der Olinde Rodrigues'schen Gleichungen. Dabei sind mit $\frac{D}{H}$ und $\frac{D''}{H}$ die wichtigen Ausdrücke bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{H} &= \sum \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = -\sum \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} \\ \frac{D''}{H} &= \sum \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = -\sum \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

zu welchen wir gelangen können, wenn wir die bekannte Relation:

$$\sum \alpha \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0,$$

welche infolge der Bedingungsgleichung (5) besteht, successive nach u und v differenziieren.

Die Entwickelung des Gliedes (b) giebt darnach folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} (\mathrm{b}) = &- h \frac{1}{E^2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial \gamma}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 \right] \\ &- h \frac{1}{G^2} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial v} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial \gamma}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial v} \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 \right] \\ = &- h \left\{ \frac{G \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} + E \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v}}{EG} \right\}, \end{aligned}$$

wobei wir uns mit der Relation (5') in der Form: $\varDelta_1(\xi, \eta) = 0$ bedient haben. Hiermit ist dann die Uebereinstimmung der Ausdrücke (39') und (40') Glied für Glied nachgewiesen.

Litteraturnachweis für die Citate.

Einleitung.

[1]) E. Beltrami: Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali: Annali di matematica, serie II, tomo X. (Milano 1880).

[2]) C. Neumann: Neue Sätze über das Newton'sche Potential: Mathematische Annalen, Band 16. (1880).

I. Abschnitt.

[3]) Gauss: Allg. Auflösung der Aufgabe, die Teile einer geg. Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgeb. in den kleinsten Teilen ähnlich wird. 1822. Werke Bd. IV, S. 193.

[4]) Gauss: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Comment. soc. reg. scien. Gotting. recentiores. Vol. VI. 1823—27 [1828]. Werke Bd. IV. Art. 11, 12, 17 (Bogenelement), Art. 13 (Biegsamkeit), Art. 11, 12, 6 (Krümmung).

[5]) Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes. Paris 1859.

I. u. II. Abschn.

[6]) E. Beltrami: Zur Theorie des Krümmungsmasses. Math. Annalen, Bd. 1. (1869).

— Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. Annali di mat., serie II, tomo I. (Milano 1867).

— Teorica generale dei parametri differenziali. Memoria della Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie II, tomo 8.

V. Abschnitt.

[7]) E. Beltrami: Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima. Mémoires de l'Academie des Sciences de Bologne. 1868.